APROXIMACE ČÍSLA $\sqrt{2}$ VE VÉDSKÉ INDII

Petr Bogan
FŽP UJEP, Králova výšina 3132/7, 400 96 Ústí nad Labem, 475284128, petr.bogan@ujep.cz

Abstrakt

Matematika dávné Indie je jeden z důležitých kořenů matematiky Evropy. Jedním z jejích zvláštních rysů je provádění aritmetických a algebraických výpočtů pomocí geometrických konstrukcí. Článek ukazuje jeden z možných postupů při odvození přibližné hodnoty druhé odmocniny z čísla dva, která je důležitou součástí védských *śulba sūter*. Zmíněné konstrukce mohou sloužit jako užitečný materiál pro učitele matematiky.

Klíčová slova: *Indie, geometrie, védské rituály, śulba sūtry.*

Úvod

Jedním z důležitých kořenů matematiky Evropy jsou znalosti a objevy starých Indů. Především pak vyspělost a elegance geometrických konstrukcí, užívaných védskými Indy v prvním tisíciletí před naším letopočtem při budování přesně předepsaných rituálně upravených pozemků (*vedi*) s cihlovými oltáři (*city*) určenými pro ohňové rituály, mne orientovaly na hlubší studium pramenů a na hledání kořenů této kultury a její matematiky. Při provádění zmíněných konstrukcí se užívalo jednoduchých nástrojů jako *rajju* (provaz), *śaṅku* (dřevěné kolíky) nebo *veṇu* (bambusová tyč).

Jednou z důležitých hodnot, nezbytných pro správné dimenzování konstruovaných objektů je druhá odmocnina čísla dva. Ve védských textech bývá definována následovně:

> *Provaz rovný úhlopříčce čtverce vytváří dvojnásobek plochy. Je to zdvojnásobovač (dvi-karanī) čtverce.*
> (např. *Āpastamba śulba sūtra 1.5*)

Dvikaranī[1] je provaz, který vytvoří (jakožto strana) čtverec, jehož obsah je roven dvojnásobku obsahu daného čtverce. Tento nástroj byl využíván například při:

- konstrukci *aśvamedha vedi*, jehož obsah je dvojnásobkem základního *vedi*,
- konstrukci půlkruhového oltáře *dakṣiṇāgni* s půdorysným obsahem rovným oltáři kruhovému,
- konstrukci *paitrkī vedi* s půdorysným obsahem dvou *puruṣ*.

Materiál a metody

Provedl jsem analýzu pramenů uvedených v seznamu literatury. Jako zdroj obecných informací jsem použil encyklopedii védských rituálů [1]. Při analýze informací týkajících se matematických znalostí a dovedností jsem vycházel především z [2] a [3] s přihlédnutím k podrobnostem v [4], [5] a [6].

---

[1] Slovní spojení *dvi-karanī* sestává z výrazů *dvi*, což lze přeložit jako dvě, resp. předponu dvou-, slovo *karanī* pak vyjadřuje stranu čtverce, resp. druhou odmocninu. Toto spojení tedy lze přeložit jako stranu dvojnásobného čtverce, nebo též druhou odmocninu ze dvou. Vzhledem ke kontextu, kde je konstruována strana čtverce, který má dvojnásobný obsah vůči stávajícímu jsem užil překladu „zdvojnásobovač čtverce“.

Výsledky a diskuse

Śulba sūtry

Śulba sūtry jakožto „pravidla pro provaz“ nabízejí postupy a prostředky pro správnou konstrukci védských ceremoniálních platforem, jsou řazeny mezi *vedāṅgy* (přesněji mezi *kalpa sūtry*) a patří z hlediska matematiky k nejdůležitějším dílům védské slovesnosti. Jako ostatní védské znalosti a dovednosti byly předávány ústní cestou v rodinách bráhmanů z generace na generaci. Z tohoto důvodu byly psány formou maximální stručnosti a bez doprovodného (ústního) vysvětlení byly často nesrozumitelné. Do dnešní doby se pak zachovala pouze zmíněná pravidla bez postupu jejich odvození nebo ověření pravdivosti. Možné postupy nám nabízejí díla komentátorů, jejichž časový odstup od původních autorů bývá v řádu stovek nebo dokonce tisíců let.

Aproximace hodnoty $\sqrt{2}$ v śulba sūtrách

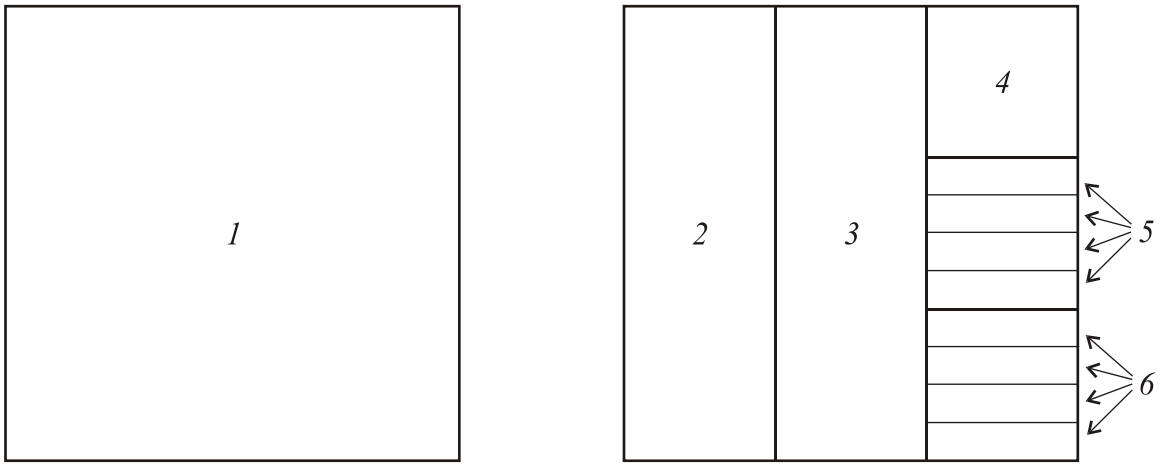
Následující text stanovuje pravidlo pro výpočet délky úhlopříčky čtverce z délky jeho strany.

> *Zvětší-li se daná míra o její třetinu a čtvrtinu z této třetiny zmenšenou o třiceti čtvrtinu oné čtvrtiny z třetiny, vznikne diagonála [doslovně „dohromady s diferencí“].*
> (např. *Āpastamba śulba sūtra 1.6*)

Označme délku strany čtverce *a*. Moderním zápisem pomocí formule můžeme zmíněnou přibližnou délku úhlopříčky, zvanou *saviśeṣa*, zapsat $a \cdot (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34})$. Výraz v závorce odpovídá hodnotě $\frac{577}{408} \cong 1{,}4142157$, která poměrně přesně aproximuje hodnotu $\sqrt{2} \cong 1{,}4142136$. Jakým postupem k této aproximaci staří Indové došli, zůstává ve sféře záhad. Dostupná literatura však některé možnosti naznačuje. Je třeba mít na mysli, že spojení těchto postupů s původními texty není historicky doloženým faktem.

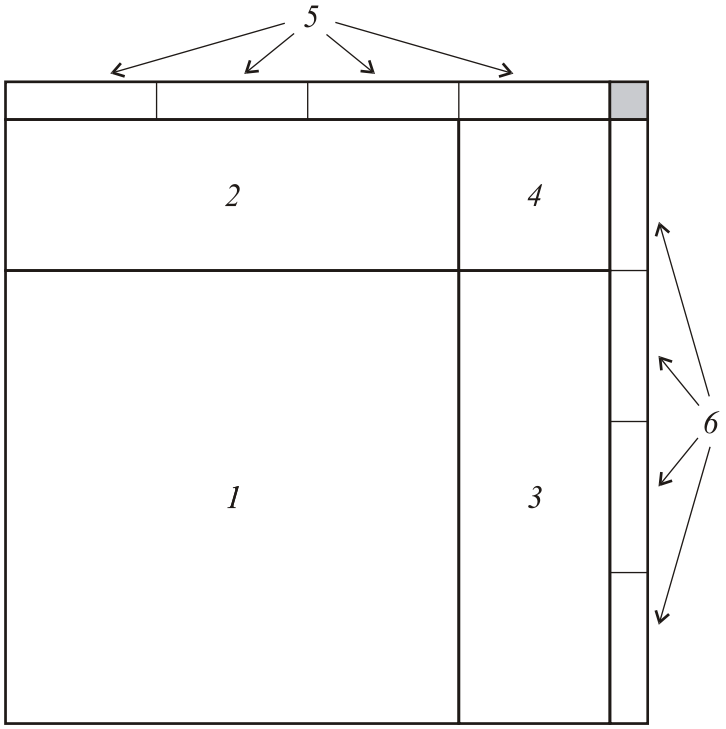
Možný postup při odvození saviśeṣy

Jeden z možných postupů, citovaných např. v [5], je zobrazen na následujících dvou obrázcích. Jsou dány dva shodné čtverce (viz obrázek 1), jejichž strany mají délku rovnu jedné.



Obrázek 1. Rozdělení čtverců (zdroj: autor podle [3]).

Cílem je rozložit tyto čtverce na části, z nichž lze složit jeden čtverec (o obsahu 2). První čtverec necháme celý, čímž získáme obrazec *1* (viz obrázek 1). Druhý čtverec rozdělíme na třetiny. První dvě třetiny necháme celé, čímž obdržíme obrazce *2* a *3*. Třetí třetinu opět rozdělíme na třetiny, tím získáme tři obrazce o velikosti jedné devítiny plochy původního čtverce. První z těchto devítin opět ponecháme celou, čímž obdržíme obrazec *4*. Zbylé dvě devítiny tedy obrazce *5* a *6* rozdělíme každý na čtyři díly. Tím vznikne 8 dílů o velikosti jedné třiceti šestiny obsahu původního čtverce. Nyní obrazce přeskupíme (viz obrázek 2).



Obrázek 2. Přeskupení dílků (zdroj: autor podle [3]).

Jak je patrno, obrazce nám téměř vyplnily čtverec, jehož strana má délku $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3.4}$. Pro doplnění celého čtverce tedy přidáme malý, šedě vybarvený čtverec v pravém horním rohu s obsahem $\frac{1}{144}$ plochy jednoho ze dvou původních čtverců. Přidanou plochu je však třeba opět odebrat. Odejmou se tedy dva proužky po stranách čtverce, jejichž šířka x se vypočítá z následujícího vztahu:

$$2x\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3.4}\right)-x^2=\left(\frac{1}{12}\right)^2$$

Hodnota x^2, odpovídající ploše, ve které se oba proužky překrývají, se jako malá zanedbá. Posléze po jednoduché úpravě obdržíme:

$$x=\frac{1}{3.4.34}$$

Velikost strany nově získaného čtverce a tudíž i hledaná aproximace čísla $\sqrt{2}$ je

$$\sqrt{2}\approx 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{3.4.34}.$$

Věděli staří Indové, že saviśeṣa je pouze přibližnou hodnotou?

Odkazem na *Kātyāyanovu śulba sūtru*, ve které se hovoří o odchylce této hodnoty od skutečné, můžeme předpokládat, že si védští Indové byli vědomi, že se jedná pouze o přibližnou konstrukci. Tuto skutečnost dokládá i ilustrační příklad komentátora *Kapardiho*. Za zmínku stojí i fakt, že staří Indové používali stejné jednotky pro délkové i plošné hodnoty. Jejich význam určoval kontext.

Kapardi si vzal za základ čtverec o velikosti strany 12 *angul*, přičemž jednomu *angulu* odpovídá 34 *tila* (podrobnosti viz např. v [5]).

Platí tedy, že obsah čtverce, jehož strana má délku $saviśeṣa$ dvanácti, je:

$$saviśeṣa = 12 + \frac{12}{3} + \frac{12}{3.4} - \frac{12}{3.4.34}\ angul\ =\ 17\ angul - 1\ tila\ =\ 577\ tila$$

$$(saviśeṣa)^2 = (577\ tila)^2 = 33\ 2929\ tila$$

Skutečný obsah čtverce, jehož obsah je dvojnásobek obsahu čtverce o straně 12 *angul*, je:

$$2 \cdot (12\ angul)^2 = 2 \cdot (408\ tila)^2 = 33\ 2928\ tila$$

Z výpočtu tedy vyplývá, že skutečná velikost čtverce je o 1 *tila* menší. Hodnota *saviśeṣa* je tedy pouze přibližná. Skutečnost, že se jedná o přibližnou hodnotu, podtrhuje i fakt, že je pro ni užito odlišného označení *saviśeṣa* a nikoli *dvikaranī*.

Závěr

Znalosti a vědomosti, obsažené v *śulba sūtrách*, se dochovaly ve formě *sūter* bez doprovodných komentářů, vysvětlivek nebo důkazů. Článek ukazuje jeden z možných postupů, kterým mohla být odvozena hodnota *saviśeṣa*, neboli aproximace čísla $\sqrt{2}$. Dále pak autor poukazuje na skutečnosti, podle kterých si staří Indové byli vědomi, že hodnota *saviśeṣa* je mírně odlišná od délky *dvikaranī*. Konstrukce zmíněné v článku mohou sloužit jako inspirativní materiál pro učitele matematiky.

Poděkování

Děkuji prof. Cihlářovi za podnětné rady a pomoc při přípravě tohoto článku.

Literatura

[1] RANADE, H. G. *Illustrated Dictionary of Vedic Rituals.* New Delhi: Indira Gandhi National Centre for the Arts / Arian Books International, 2006. 348 s. ISBN 81-7305-309-X

[2] PLOFKER, K. *Mathematics in India.* Princeton: Princeton University Press, 2009. 384 s. ISBN 978-0-691-12067-6

[3] DATTA, B. *Ancient Hindu geometry: the science of the Sulba*. New Delhi: Cosmo Publications, 1993. 239 s.

[4] BAUDHĀYANA. *Baudhāyan Śulbasūtram with Sanskrit Commentary*. Editet by G. Thibaut, with English translation, critical notes and extracts with commentary of DwarakanathYajavan. New Delhi: Shri Ram Swarup Sharma, 1968. 215 s.

[5] PRAKASH, S. SHARMA, R. S. *Āpastamba - Śulbasūtram*. New Delhi: The Research Institute of Ancient Scientific Studies, 1968. 30, 261, 119 s.

[6] KHADILKAR S. D. *Kātyāyana Śulba Sūtra with English translation, explanatory notes, figures and articles*. Edited by S. D. Khaldilkar. Poona: Vaidika Samsodhana Mandala, 1974. 120s.

Abstract

The mathematics of ancient India is one of the important roots of European mathematics. One of its unique attributes is using geometry for performing arithmetical and algebraic computations. This article is focused on one of the possible methods of derivation of the approximate value of square root of two. This value is an important part of the *śulba šūtras*. The mentioned constructions can be used as useful resource for mathematics teachers.