SLOVNÍ ÚLOHY VEDOUCÍ NA ŘEŠENÍ OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Karolína Šebová
Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita v Ostravě 30. dubna 22, 701 03, Ostrava, 605050291, carolina.sebova@seznam.cz

Abstrakt

Příspěvek je výňatkem z bakalářské práce, která se zabývá problematikou slovních úloh řešených pomocí obyčejných diferenciálních rovnic. V příspěvku stručně charakterizuji specifika slovních úloh vedoucích na obyčejné diferenciální rovnice a metodiku jejich řešení. V druhé části pak prezentuji jednu konkrétní úlohu z teorie učení, kdy množství naučených informací a množství zapomenutých informací chápeme jako spojitě se měnící veličiny a úlohu řeším limitním přechodem.

Klíčová slova: *obyčejná diferenciální rovnice, slovní úloha*

Úvod

Aplikace obyčejných diferenciálních rovnic se dají nalézt téměř všude kolem nás – ať už to jsou aplikace ve fyzice (mechanické pohyby, kmitání, ochlazování tělesa, radioaktivní rozpad), v chemii (míchání roztoků, difúze a chemická kinetika), v biologii a ekologii (rozmnožování bakterií, vývoj populace jistého živočišného druhu v ekologickém systému jistého teritoria), v medicíně (odbourávání látky z krve, výpočet dávkování inzulinu) nebo ve společenských vědách, jako je ekonomie (model rovnováhy na trhu mezi nabídkou a poptávkou, konkurence), nebo v psychologii (poznatky z teorie učení).

Slovní úlohy popisují skutečnosti motivované každodenní zkušeností přírodními nebo společenskými zákony a reálnými problémy, přičemž čím lépe a komplexněji úloha vystihuje realitu, tím složitější obvykle bývá její řešení. Zadání těchto úloh je formulováno slovně a jeho součástí většinou není samotná diferenciální rovnice. Při vytváření zadání slovních úloh a jejich formulování musí být dodržena jednoznačnost v tom smyslu, aby čtenář nemohl interpretovat úlohu více způsoby. Zároveň by však striktní a matematicky precizní vyjadřování nemělo mít vliv na srozumitelnost úlohy, je tedy nezbytné nalézt správnou míru mezi přesností a srozumitelností formulace úlohy. Úkolem řešitele je pak na základě svých znalostí odvodit ze zadání diferenciální rovnici popisující tento problém, tu vyřešit a následně interpretovat obdržený výsledek.

Při řešení slovních úloh je dobré vytvořit si určitý postup, jednotnou metodiku a tu se snažit dodržovat. Nejdůležitější je důkladně si pročíst text úlohy a dobře pochopit její smysl. Dále je vhodné zhotovit si zjednodušený zápis, případně náčrtek, a pokud je to možné, pokusit se vytvořit jistou analogii s určitou úlohou řešenou již dříve. Na základě rozboru úlohy stanovíme závisle a nezávisle proměnnou a vztahy, které ovlivňují závislost mezi nimi. Tyto vztahy se určují na základě platných principů, známých zákonů, vysledovaných zákonitostí, případně empirických vztahů přímo souvisejících s daným problémem, přičemž některé faktory se snažíme zjednodušit vhodnou idealizací podmínek a abstrakcí sledovaných objektů. Z výše uvedené charakteristiky těchto slovních úloh je patrné, že řešitel má určité přírodovědné, fyzikální, technické nebo společensko-vědní znalosti z oblasti, ve které daná úloha vznikla. Z těchto poznatků se pak sestaví samotná diferenciální rovnice.[2.]

Součástí řešení by měla být také diskuse vzhledem k počátečním podmínkám a parametrům úlohy, kdy z množiny všech řešení reprezentujících obecný průběh děje (celé třídy dějů), obdržíme partikulární řešení popisující konkrétní děj. Důležitá je také samotná interpretace řešení, tzn. uvědomění si, že některá obdržená řešení jsou sice matematicky správná, ale ve skutečnosti se na základě jistých omezení nemohou realizovat.

Z definice derivace funkce v bodě, která má význam rychlosti změny funkčních hodnot na infinitezimálním okolí tohoto bodu, se dále vychází při sestavování diferenciálních rovnic pomocí limitního přechodu. Obyčejnou diferenciální rovnicí rozumíme relaci na určitém oboru svazující nezávisle proměnnou, neznámou funkci a její derivace. V aplikacích se nejčastěji vyskytují slovní úlohy vedoucí na ODR 1. a 2. řádu. Nalézt řešení diferenciální rovnice znamená nalézt takovou funkci, u které existují všechny v rovnici se vyskytující derivace a která vyhovuje dané rovnici identicky, tzn. ve všech bodech definičního oboru.

Nyní prezentujeme řešení jedné vybrané úlohy z teorie učení, jejíž zadání je inspirované knihou Dennise G. Zilla [3.] Předpokládáme, že uvažované procesy učení a zapomínání jsou plynulé a spojitě se měnící s časem, a úlohu řešíme limitním přechodem.

Zadání úlohy:
V teorii učení bylo zjištěno, že rychlost, s jakou se člověk dokáže naučit určité množství látky, je přímo úměrná množství látky, které ještě zbývá k naučení. Nechť M je celkové množství látky k zapamatování a $A(t)$ množství látky zapamatované v čase t. Nalezněte a vyřešte diferenciální rovnici pro A. Následně vezměte v úvahu faktor zapomínání, který je přímo úměrný relativnímu množství naučených informací v čase t a rychlosti učení (časové změně naučených informací). Nalezněte časovou závislost pro množství zapamatovaných informací.
Určitá osoba se za 1 hodinu naučila 2/5 veškerého textu. U zmíněné osoby se dále ukázalo, že z 2/5 veškerého množství se 12% nevstřebalo do paměti (bylo zapomenuto).

Řešení:

celkové množství látky	M
množství zapamatované v čase t	$A(t)$
množství zapamatované v čase t+dt	$A(t)+k\big(M-A(t)\big)\mathrm{d}t$
množství zapamatované v čase t	$Z(t)=A(t)-z(t)$
funkce faktoru zapomínání	$z(t)=l\cdot\frac{A(t)}{M}\cdot A'(t)$
k, l – konstanty úměrnosti, $k, l \in \mathbf{R}^{+}-\{0\}$	
množství naučené v čase t = 1 h	$A(1)=\frac{2}{5}M$
zapomenuto v čase t = 1 h	$z(1)=\frac{12}{100}\cdot\frac{2}{5}M=\frac{6}{125}M$

Sestavení diferenciální rovnice pro A:

$$A(t+\mathrm{d}t)-A(t)=A(t)+k\big(M-A(t)\big)\mathrm{d}t-A(t)$$

$$\frac{A(t+\mathrm{d}t)-A(t)}{\mathrm{d}t}=k\big(M-A(t)\big)$$

$$\lim_{dt \to 0} \frac{A(t + dt) - A(t)}{dt} = k\big(M - A(t)\big)$$
$$A' = k\big(M - A(t)\big)$$
Vzniklou lineární nehomogenní diferenciální rovnici prvního řádu řešíme metodou separace proměnných a obdržíme toto obecné řešení daného problému:
$$A(t) = M - Ke^{-kt},$$
kde *K* je integrační konstanta.

Za předpokladu, že látka, kterou se má člověk naučit, je pro něj zcela nová, tedy v čase $t = 0$ si člověk nepamatuje nic, $A(0) = 0$, vyčíslíme integrační konstantu *K* a obdržíme toto partikulární řešení:
$$A(t) = M(1 - e^{-kt})$$
Řešením je část rostoucí exponenciály začínající v počátku souřadné soustavy. Tato exponenciála se asymptoticky přibližuje konstantě *M* (veškeré množství informací).
$$M \cdot \lim_{t \to \infty} (1 - e^{-kt}) = M$$

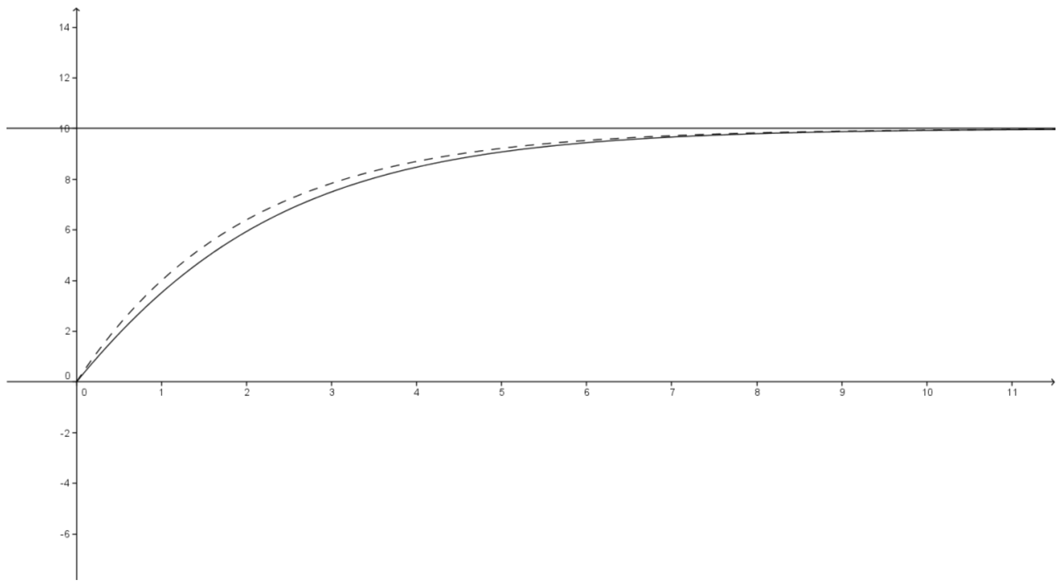
Sestavení funkce pro *z*:
$$z(t) = l \frac{A(t)}{M} A'(t)$$
$$z(t) = kl(1 - e^{-kt})\Big(M - M(1 - e^{-kt})\Big) = klMe^{-kt}(1 - e^{-kt})$$
Sestavení funkce *Z*:
$$Z(t) = A(t) - z(t) = M(1 - e^{-kt})(1 - kle^{-kt})$$
Řešení funkce *Z* se započítáním daných parametrů:

Z podmínky $A(1) = \frac{2}{5}M$ lze vyčíslit konstantu úměrnosti $k = \ln\frac{5}{3}$.

A tedy
$$A(t) = M\left(1 - \left(\frac{5}{3}\right)^{-t}\right).$$
Po dosazení za $A(t)$ a $A'(t)$ do funkce zapomínání obdržíme:
$$z(t) = l\left(\ln\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right)^{-t}\left(1 - \left(\frac{5}{3}\right)^{-t}\right) = lM\left(\ln\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right)^{-t}\left(1 - \left(\frac{5}{3}\right)^{-t}\right)$$
Po dosazení $z(1) = \frac{6}{125}M$ vyjádříme konstantu $l = \left(5 \cdot \ln\frac{5}{3}\right)^{-1}$.

Funkci $z(t)$ tedy můžeme upravit do tohoto tvaru:
$$z(t) = \frac{M}{5}\left(\frac{5}{3}\right)^{-t}\left(1 - \left(\frac{5}{3}\right)^{-t}\right)$$

Nyní lze dosadit do funkce vyjadřující množství skutečně zapamatované látky v čase *t*:
$$Z(t) = M(1 - e^{-kt})(1 - kle^{-kt}) = M\left(1 - \left(\frac{5}{3}\right)^{-t}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\left(\frac{5}{3}\right)^{-t}\right)$$
Řešením je tedy opět část rostoucí exponenciály začínající v počátku soustavy souřadnic, opět asymptoticky přibližuje k celkovému množství *M*.
$$M \cdot \lim_{t \to \infty}\left(1 - \left(\frac{5}{3}\right)^{-t}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\left(\frac{5}{3}\right)^{-t}\right) = M$$



Obr.1: Funkce $A(t)$ (čárkovaná funkce) roste o něco rychleji než funkce $Z(t)$, ve které započítáváme navíc faktor zapomínání.

Výsledky a závěr

Bakalářská práce si kladla za cíl sestavit sbírku motivačních slovních úloh, které mají být ukázkou použití obyčejných diferenciálních rovnic v rozmanitých souvislostech. V tomto příspěvku jsem stručně charakterizovala tyto slovní úlohy a nastínila metodiku při jejich řešení. Ve druhé části příspěvku jsem pak prezentovala řešení jedné vybrané úlohy z teorie učení.

Obyčejné diferenciální rovnice se mohou vyskytovat v širokém spektru konkrétních aplikací, nejen v přírodních vědách, ale i ve společenských vědách, jako například v psychologii učení.

Poděkování

Velmi ráda bych poděkovala RNDr. Martinu Swaczynovi, Ph.D. za ochotu, rady a připomínky, které pomohly k vytvoření tohoto příspěvku.

Literatura

[1.] REKTORYS, Karel *Co je a k čemu je vyšší matematika.* Praha: Academia, 2001, 156 s. ISBN 80-200-0883-7.

[2.] JAREŠOVÁ, Miroslava, Bohumil VYBÍRAL *Diferenciální rovnice: studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku.* http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/difro.pdf

[3.] ZILL, Dennis G. *A First Course in Differential Equations with Applications*, Pacific Grove: Brooks/Cole Publishing Company, 1997.

Abstract

The contrubution is an extract of my bachelor thesis which is devoted to miscelaneous problems formulated only verbally and solved by means of ordinary differential equations. First we briefly characterize specifics of these problems and solving methods. In the second part we present one concrete problem from the theory of learning. The amount of learned information, the amount of forgotten information and the amount of memorised information we consider as quantites continously depending on time. The problem is solved by the method of limit transition.