JEDNO ZOBECNĚNÍ HAHN-BANACHOVY VĚTY

Lenka Ploháková
katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita v Ostravě
30. dubna 22, 701 03 Ostrava, P10114@student.osu.cz

Abstakt

Hahn-Banachova věta se obvykle vyslovuje v rámci vektorového prostoru nad tělesem reálných čísel. Na protipříkladu ukážeme, že v rámci vektorového prostoru nad neúplným tělesem (například tělesem racionálních čísel) tvrzení Hahn-Banachovy věty obecně nemusí platit. Naším cílem je však ukázat, že pokud sublineární zobrazení vystupující v Hahn-Banachově větě je speciálního tvaru, potom její tvrzení lze dokázat i v mnohem obecnějším rámci dvou vektorových prostorů, z nichž jeden je lineárně uspořádaný, nad libovolným lineárně uspořádaným tělesem.

Klíčová slova: *Hahn-Banachova věta, sublineární funkcionál a zobrazení, Daxova věta.*

Úvod

Nejprve vyslovíme klasické znění Hahn-Banachovy věty (její algebraickou verzi, viz [1, věta 2.16]), které uvedeme bez důkazu. Připomeňme, že když W je reálný vektorový prostor, potom funkcionál $p\colon W \to \mathbb{R}$ se nazývá *sublineární* právě tehdy, když pro všechna $x, y \in W$ a všechna nezáporná $a \in \mathbb{R}$ platí $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ a $p(ax) = ap(x)$. Dále připomeňme, že $W^{\#}$ označuje algebraický duál vektorového prostoru W, tj. prostor všech lineárních forem $L\colon W \to \mathbb{R}$ definovaných na prostoru W. Obdobně, je-li $M \subset \subset W$ lineárním podprostorem vektorového prostoru W, potom $M^{\#}$ označuje prostor všech lineárních forem $l\colon M \to \mathbb{R}$ definovaných na M. Nerovnost $l \leq p$ na M resp. $L \leq p$ na W znamená, že $l(x) \leq p(x)$ resp. $L(x) \leq p(x)$ pro všechna $x \in M$ resp. $x \in W$.

Hahn-Banachova věta (algebraická verze). *Nechť M je podprostor reálného vektorového prostoru W, na kterém je dán sublineární funkcionál $p\colon W \to \mathbb{R}$. Potom každou lineární formu $l \in M^{\#}$ splňující $l \leq p$ na M lze rozšířit na lineární formu $L \in W^{\#}$ takovou, že $L = l$ na M a $L \leq p$ na W.*

Protipříklad

Jak již víme, klasická Hahn-Banachova věta se vyslovuje v rámci vektorového prostoru nad tělesem reálných čísel. Známé důkazy této věty, viz např. [1] a [3, str. 6-7], využívají faktu, že těleso reálných čísel je úplné, což znamená, že každá omezená množina reálných čísel má supremum a infimum. Zajímá nás, zda Hahn-Banachovu větu lze dokázat i bez použití tohoto předpokladu, což by znamenalo, že tvrzení Hahn-Banachovy věty by bylo platné i v rámci vektorového prostoru nad lineárně uspořádaným tělesem, které není úplné, tj. liší se od tělesa reálných čísel. Následující protipříklad (viz [4]) ukáže, že to není možné.

Protipříklad. Uvažujme dvoudimenzionální vektorový prostor $W = \mathbb{Q}^2$ nad tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$.

Nalezneme podprostor $M \subset\subset W$, sublineární zobrazení $p\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ a lineární zobrazení $l\colon M \to \mathbb{Q}$ takové, že $l \leq p$ na M, které nebude možné rozšířit na $L\colon W \to \mathbb{Q}$

splňující $L = l$ na M a $L \leq p$ na W.

Za podprostor M zvolíme osu x, tj. přímku $M = \{ [x,y] \in \mathbb{Q}^2 : y = 0 \}$. Lineární zobrazení l zvolíme nulové, tedy $l(x,0) = 0$ pro všechna racionální x. Zbývá určit sublineární zobrazení p. Zobrazení p je třeba určit tak, aby na ose x bylo nezáporné. Díky pozitivní homogenitě – chceme, aby platilo $p(x,y) = yp(x/y,1)$ pro všechna kladná racionální y a aby $p(x,y) = -yp(-x/y,-1)$ pro všechna záporná racionální y – stačí, abychom hodnoty zobrazení p určili na přímkách $y = 0$, $y = 1$ a $y = -1$.

Pro $x \in \mathbb{Q}$ položíme $p(x,0) = |x|$ resp. $p(x,1) = f(x)$ a $p(x,-1) = g(x)$, kde $f(x)$ a $g(x)$ jsou vhodné funkce, které zavedeme později, tedy

$$p(x,y) = \begin{cases} yf\left(\frac{x}{y}\right), & \text{jestliže } y > 0\,, \\ |x|, & \text{jestliže } y = 0\,, \\ -yg\left(-\frac{x}{y}\right), & \text{jestliže } y < 0\,, \end{cases}$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}$.

Nyní uvažujeme iracionální číslo, například $\sqrt{2}$. Nechť $\{p_n\}$ a $\{q_n\}$ jsou posloupnosti kladných racionálních čísel takové, že $p_n \nearrow \sqrt{2}$ a $q_n \searrow \sqrt{2}$. Můžeme předpokládat, že

$$-1 < \frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2}$$

a

$$\frac{q_n - q_{n+1}}{p_n - p_{n+1}} < \frac{q_{n+1} - q_{n+2}}{p_{n+1} - p_{n+2}}$$

pro každé n. Poznamenejme, že

$$\frac{q_n - q_{n+1}}{p_n - p_{n+1}}$$

je směrnice úsečky spojující body $[p_n, q_n]$ a $[p_{n+1}, q_{n+1}]$. Nyní zavedeme funkci f:

$$f(x) = \begin{cases} -x - p_1 + q_1 & \text{pro každé racionální } x \leq p_1, \\ \dfrac{q_n - q_{n+1}}{p_n - p_{n+1}} x + q_n - \dfrac{q_n - q_{n+1}}{p_n - p_{n+1}} p_n & \text{pro každé racionální } x \in \langle p_n, p_{n+1} \rangle, \\ x & \text{pro každé racionální } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Nechť $\{p_n\}$ a $\{q_n\}$ jsou nyní jiné posloupnosti záporných racionálních čísel takové, že $p_n \nearrow -\sqrt{2}$ a $q_n \searrow -\sqrt{2}$ a splňují výše uvedené nerovnosti. Zavedeme funkci g:

$$g(x) = \begin{cases} -x - p_1 + q_1 & \text{pro každé racionální } x \leq p_1, \\ \dfrac{q_n - q_{n+1}}{p_n - p_{n+1}} x + q_n - \dfrac{q_n - q_{n+1}}{p_n - p_{n+1}} p_n & \text{pro každé racionální } x \in \langle p_n, p_{n+1} \rangle, \\ x & \text{pro každé racionální } x > -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Z faktu, že funkce f a g jsou konvexní, dostáváme, že zobrazení p je sublineární. Navíc p splňuje předpoklad Hahn-Banachovy věty, že $l \leq p$ na M.

Zobrazení l je definováno na ose x, tedy je známa jeho hodnota v bodě (resp. vektoru) $[1,0]$. Pro rozšíření na prostor $\mathbb{Q}^2$ stačí určit hodnotu v jiném lineárně nezávislém bodě, např. $[0,1]$. Jak by tedy rozšířené zobrazení L mělo vypadat, aby platilo $L \leq p$ na W?

Využijeme druhou část důkazu algebraické Hahn-Banachovy věty [1, věta 2.16]. Položíme $\tilde{M} = \mathrm{Lin}\big(M \cup \{[0,1]\}\big) = \{ x + \lambda[0,1] : x \in M,\ \lambda \in \mathbb{Q} \} = \mathbb{Q}^2$. Jelikož L má být lineární forma a má splňovat $L = l$ na M, dostáváme, že $L\big(x + \lambda[0,1]\big) = l(x) + \lambda L\big([0,1]\big)$. Potřebujeme, aby $l(x) + \lambda L\big([0,1]\big) = \lambda L\big([0,1]\big) \leq p\big(x + \lambda[0,1]\big)$ pro každé $x \in M$ a $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Zvolme $\lambda \in \mathbb{Q}$. Vyšetříme tři možné případy:

1. $\lambda = 0$. Potřebujeme tedy, aby $0 \leq p(x)$ pro každé $x \in M$. Tak ovšem bylo sublineární zobrazení p zavedeno. Požadovaná nerovnost je tudíž splněna.
2. $\lambda > 0$. Potřebujeme tedy, aby $L\big([0,1]\big) \leq (1/\lambda)p\big(x + \lambda[0,1]\big) = p\big(x/\lambda + [0,1]\big)$ pro každé $x \in M$ a $\lambda \in \mathbb{Q}$. Ekvivalentně potřebujeme, aby $L\big([0,1]\big) \leq p\big(x + [0,1]\big)$ pro každé $x \in M$, neboli $L\big([0,1]\big) \leq \inf_{x \in \mathbb{Q}} p\big([x,0] + [0,1]\big) = \inf_{x \in \mathbb{Q}} p\big([x,1]\big)$, protože každý bod podprostoru M je tvaru $[x,0]$, kde $x \in \mathbb{Q}$. Ovšem $p\big([x,1]\big) = f(x)$, tudíž $L\big([0,1]\big) \leq \inf_{x \in \mathbb{Q}} f(x) = \sqrt{2}$.
3. $\lambda < 0$. Potřebujeme tedy, aby $L\big([0,1]\big) \geq (1/\lambda)p\big(x + \lambda[0,1]\big) = -p\big(-x/\lambda - [0,1]\big)$ pro každé $x \in M$ a $\lambda \in \mathbb{Q}$. Ekvivalentně potřebujeme, aby $L\big([0,1]\big) \geq p\big(x - [0,1]\big)$ pro každé $x \in M$, neboli $L\big([0,1]\big) \geq \sup_{x \in \mathbb{Q}} p\big([x,-1]\big) = \sup_{x \in \mathbb{Q}} g(x) = \sqrt{2}$.

Z bodu 2. a 3. dostáváme, že $L\big([0,1]\big) \leq \sqrt{2}$ a zároveň $L\big([0,1]\big) \geq \sqrt{2}$, tedy $L\big([0,1]\big) = \sqrt{2}$, což ale není možné. To znamená, že lineární zobrazení l není možné rozšířit na L tak, aby platilo $L = l$ na M a $L \leq p$ na $\mathbb{Q}^2$.

Zobecnění pomocí Daxovy věty

Dosud jsme se věnovali Hahn-Banachově větě ve vektorovém prostoru nad tělesem reálných čísel. V této části se budeme zabývat formulací Hahn-Banachovy věty ve vektorovém prostoru nad obecným tělesem $\mathbb{F}$. Jak jsme již zmínili, budeme uvažovat speciální tvar sublineárního zobrazení. Zvolíme takový tvar, který vystupuje v Daxově větě (viz [5] a [6]). Zde uvedeme její zobecnění, a to bez důkazu. Nechť W a V jsou vektorové prostory nad lineárně uspořádaným tělesem $\mathbb{F}$, kde V je navíc lineárně uspořádaný. Dále budeme používat následující označení: pro libovolný vektor $u \in V$ zavedeme zobrazení $\iota u\colon \mathbb{F} \to V$ tak, že pro každé $\lambda \in \mathbb{F}$ položíme $\iota u(\lambda) = \lambda \star u$, kde symbol $\star$ značí skalární násobení na vektorovém prostoru V. Symbolem $\preceq$ označíme uspořádání na vektorovém prostoru V.

Daxova věta. *Nechť W a V jsou vektorové prostory nad lineárně uspořádaným tělesem $\mathbb{F}$, kde V je navíc lineárně uspořádaný. Dále nechť $L\colon W \to V$ je lineární zobrazení, $\beta_1, \ldots, \beta_n\colon W \to \mathbb{F}$ jsou lineární formy a $w_1, \ldots, w_n \in V$ jsou nezáporné vektory resp. váhy. Pak pro každé $x \in W$ platí, že $L(x) \preceq \iota w_1|\beta_1 x| + \iota w_2|\beta_2 x| + \cdots + \iota w_n|\beta_n x|$, právě tehdy, když existují vektory $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ takové, že $-w_j \preceq v_j \preceq w_j$ pro $j = 1, \ldots, n$, a pro každé $x \in W$ platí, že $\gamma(x) = \iota v_1 \beta_1 x + \iota v_2 \beta_2 x + \cdots + \iota v_n \beta_n x$.*

Nyní můžeme formulovat následující zobecnění Hahn-Banachovy věty.

Hahn-Banachova věta, zobecněná. *Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $\mathbb{F}$, $M \subset\subset W$ je lineární podprostor prostoru W, V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Dále nechť $\beta_1, \ldots, \beta_n\colon W \to \mathbb{F}$ jsou lineární formy, $w_1, \ldots, w_n \in V$ nezáporné vektory resp. váhy, $p\colon W \to V$ je sublineární zobrazení na vektorovém prostoru W ve speciálním tvaru $p(x) = \iota w_1|\beta_1 x| + \iota w_2|\beta_2 x| + \ldots + \iota w_n|\beta_n x|$ a l lineární zobrazení na M splňující $l \preceq p$ na M. Potom existuje lineární zobrazení $L \in W^{\#}$ tak, že $L = l$ na M a $L \preceq p$ na W.*

Důkaz. Nechť $\beta_1', \dots, \beta_n' \colon M \to \mathbb{F}$ jsou lineární formy, které jsou zúžením lineárních forem $\beta_1, \dots, \beta_n$ na podprostor $M \subset\subset W$, tj. pro každé $x \in W$ platí $\beta_j' x = \beta_j x$, kde $j = 1, \dots, n$. Víme, že l je lineární a $l \preceq p$ na M, tedy pro každé $x \in M$ platí, že $l(x) \preceq \preceq p(x) = \iota w_1 |\beta_1' x| + \iota w_2 |\beta_2' x| + \dots + \iota w_n |\beta_n' x|$, což podle Daxovy věty (zúžené na podprostor M prostoru W) implikuje existenci $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ takových, že $-w_j \preceq v_j \preceq w_j$ pro $j = 1, \dots, n$ a pro všechna $x \in M$ platí, že $l(x) = \iota v_1 \beta_1' x + \iota v_2 \beta_2' x + \dots + \iota v_n \beta_n' x$.

Nyní zobrazení $L \colon W \to V$ zavedeme tak, že pro každé $x \in W$ položíme $L(x) = = \iota v_1 \beta_1 x + \iota v_2 \beta_2 x + \dots + \iota v_n \beta_n x$. Z Daxovy věty dostáváme, že pro každé x z vektorového prostoru W platí nerovnost $L(x) \preceq \iota w_1 |\beta_1 x| + \iota w_2 |\beta_2 x| + \dots + \iota w_n |\beta_n x| = p(x)$. Tedy $l = L$ na M (jelikož β_j' je zúžením β_j na M pro každé $j = 1, \dots, n$) a $L \preceq p$ na W. ■

Závěr

Ukázali jsme, že pro konkrétní volbu sublineárního zobrazení je zobecnění Hahn-Banachovy věty možné. Je tedy na snadě uvažovat i o dalších možnostech zobecnění, nejen pomocí Daxovy věty, které jsme ukázali v tomto článku. Aplikace těchto zobecnění mohou být velice zajímavé, konkrétně u Daxovy věty víme, že je důležitou součástí teorie aproximace. Tím se nám otevírá nový prostor nahlížení na úlohy, které teorie aproximace řeší. Můžeme začít uvažovat o jejich zobecnění a nacházet tak nové možnosti jejich využití a uplatnění.

Literatura

[1] Lukeš, J. *Zápisky z funkcionální analýzy.* 1. vydání. Praha: Karolinum, 2002. ISBN 80-7184-597-3.

[2] Lukeš, J. *Úvod do funkcionální analýzy.* 1. vydání. Praha: Karolinum, 2005. ISBN 80-246-0969-X.

[3] Buskes, G. *The Hahn-Banach Theorem surveyed.* Dissertationes mathematicae *(Rozprawy matematyczne).* Warszawa: Instytut Matematyczny PAN, 1993. ISSN 0012-1993.

[4] Bartl, D. *Příklad navrhovaný na 17th Annual Vojtěch Jarník International Mathematical Competition.* 28th March 2007.

[5] Dax, A. *A New Theorem of the Alternative.* Mathematical Programming, May 1990, Vol. 47, No. 1–3, s. 297–299.

[6] Dax, A. *The relationship between theorems of the alternetive, last norm problems, steepest descent directions, and degeneracy: A review.* Annals of Operations Research, 1993, Vol. 46, s. 11–60.

Abstact

The Hahn-Banach Theorem is usually formulated in the context of a vector space over the field of real numbers. By the means of a counterexample, we show that, in the context of a vector space over an incomplete field (for example the field of rational numbers), the claim of the Hahn-Banach Theorem can not hold true in general. Our goal is to show that if the sublinear map, which appears in the Hahn-Banach theorem, is of a special form, then the claim can be proved in a more general context of two vector spaces over an arbitrary linearly ordered field, where one of those spaces is also linerly ordered.