SYMETRIE DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ SE SINGULÁRNÍMI LAGRANGIÁNY

Bc. Monika Havelková
Ostravská univerzita v Ostravě, Přírodovědecká fakulta, katedra matematiky, 30. Dubna 22, 722113207, moninka17 @ seznam.cz

Abstrakt

V této práci studujeme symetrie singulárních Lagrangiánů s využitím rovnice Noetherové a symetrie odpovídajících Eulerových-Lagrangeových rovnic s využitím rovnice Noetherové-Bessel-Hagenovy. Obecně je známo, že v regulárním případě tvoří obvykle grupa transformací Euklidovu grupu a odpovídající zákony zachování jsou zákony zachování Hamiltoniánu při translaci a zákon zachování hybnosti při rotaci. V případě singulárních Lagrangiánu je dynamika systému složitá, ale teorie symetrií (teorém Noetherové) umožňuje řešit problém hledání symetrií stejně jako v regulárním případě.

Klíčová slova:
Singulární Lagrangeovy systémy; rovnice Noetherové; rovnice Noetherové-Bessel-Hagenova; bodové symetrie; zákony zachování

Úvod

V případě singulárních Lagrangeových systémů může být teorie symetrií aplikována podobně jako v případě regulárních Lagrangeových systémů.

Rovnice Noetherové má fundamentální význam pro teoretickou fyziku a může být využita k efektivnímu řešení následujících problémů:

1) Je-li dán Lagrangián, slouží k nalezení všech bodových symetrií a odpovídajících prvních integrálů. V tomto případě tedy rovnice Noetherové představuje parciální diferenciální rovnici pro složky symetrií Lagrangiánu L a s její pomocí určíme všechna vektorová pole, vůči nimž je Lagrangián invariantní.
2) Je-li dán systém k $\pi-$projektabilních vektorových polí na Y, představuje rovnice Noetherové systém k parciálních diferenciálních rovnic pro Lagrangián L, s její pomocí se tedy určí všechny Lagrangiány invariantní vzhledem k zadaným transformacím.

Uvažujme singulární Lagrangián studovaný fyziky v práci [3] ve tvaru:

$$L = \dot{q}^1\dot{q}^3 - q^2\dot{q}^3 + q^1q^3. \tag{1}$$

Určíme symetrie tohoto Lagrangiánu, vyjdeme tedy z rovnice Noetherové ve fibrovaných souřadnicích:

$$L\frac{d\xi_0}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q^\sigma}\xi^\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma}\tilde{\xi}^\sigma = 0 \tag{2}$$

Po dosazení a příslušných derivacích dostáváme:

$$\left(\dot{q}^1\dot{q}^3 - q^2\dot{q}^3 + q^1q^3\right)\frac{d\xi_0}{dt} + q^3\xi^1 - \dot{q}^3\xi^2 + q^1\xi^3 + \dot{q}^3\left(\frac{d\xi^1}{dt} - \dot{q}^1\frac{d\xi_0}{dt}\right) + \left(\dot{q}^1 - q^2\right)\left(\frac{d\xi^3}{dt} - \dot{q}^3\frac{d\xi_0}{dt}\right) = 0$$

Jelikož $\xi_0 = \xi_0(t)$ a $\xi^\sigma = \xi^\sigma(t, q^1, q^2, q^3)$, můžeme uvedenou rovnici zapsat ve tvaru:

$$\dot{q}^1\dot{q}^3 \frac{d\xi_0}{dt} - q^2\dot{q}^3 \frac{d\xi_0}{dt} + q^1q^3 \frac{d\xi_0}{dt} + q^3\xi^1 - \dot{q}^3\xi^2 + q^1\xi^3 + \dot{q}^3 \frac{\partial\xi^1}{\partial t} + \dot{q}^1\dot{q}^3 \frac{\partial\xi^1}{\partial q^1} + \dot{q}^2\dot{q}^3 \frac{\partial\xi^1}{\partial q^2} +$$
$$+ \left(\dot{q}^3\right)^2 \frac{\partial\xi^1}{\partial q_2^3} - \dot{q}^1\dot{q}^3 \frac{d\xi_0}{dt} + \dot{q}^1 \frac{\partial\xi^3}{\partial t} + \left(\dot{q}^1\right)^2 \frac{\partial\xi^3}{\partial q^1} + \dot{q}^1\dot{q}^2 \frac{\partial\xi^3}{\partial q^2} + \dot{q}^1\dot{q}^3 \frac{\partial\xi^3}{\partial q^3} - \dot{q}^1\dot{q}^3 \frac{d\xi_0}{dt} - q^2 \frac{\partial\xi^3}{\partial t} -$$
$$- q^2\dot{q}^1 \frac{\partial\xi^3}{\partial q^1} - q^2\dot{q}^2 \frac{\partial\xi^3}{\partial q^2} - q^2\dot{q}^3 \frac{\partial\xi^3}{\partial q^3} + q^2\dot{q}^3 \frac{d\xi_0}{dt} = 0$$

Z této rovnice dostáváme systém parciálních diferenciálních rovnic, které představují podmínky na jednotlivé komponenty vektorového pole ξ. Úpravou těchto rovnic dostáváme následující tři parciální diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\xi^1}{\partial q^1} + \frac{\partial\xi^3}{\partial q^3} - \frac{d\xi_0}{dt} = 0 \\ &\frac{\partial\xi^1}{\partial t} - q^2 \frac{\partial\xi^3}{\partial q^3} - \xi^2 = 0 \\ &q^1q^3 \frac{d\xi_0}{dt} + q^3\xi^1 + q^1\xi^3 = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

přičemž z předchozích rovnic jsme získali podmínky na komponenty vektorového pole ξ:

$$\xi_0 = \xi_0(t),\ \xi^1 = \xi^1(t, q^1), \xi^2 = \xi^2(t, q^1, q^2, q^3) \text{ a } \xi^3 = \xi^3(q^3).$$

Zderivujeme-li třetí rovnici $\frac{\partial}{\partial q^3}$ a vyjádříme-li ξ^1 dostáváme:

$$\xi^1 = -q^1 \frac{d\xi_0}{dt} - q^1 \frac{\partial\xi^3}{\partial q^3}, \tag{4}$$

přičemž víme, že $\xi^1 = \xi^1(t, q^1)$ a $\xi^3 = \xi^3(q^3)$. Můžeme tedy členy tohoto výrazu označit:

$$A(t) = -q^1 \frac{d\xi_0}{dt} \qquad \text{a} \qquad B(q^1) = -q^1 \frac{\partial\xi^3}{\partial q^3}.$$

Z rovnice (3b) tedy vyplývá, že

$$\xi^2 = \frac{\partial\xi^1}{\partial t} - q^2 \frac{\partial\xi^3}{\partial q^3} = \frac{\partial A(t)}{\partial t} - q^2 \frac{\partial\xi^3}{\partial q^3}.$$

Zderivujeme-li tuto rovnici $\frac{\partial}{\partial q^2}$:

$$\frac{\partial\xi^2}{\partial q^2} = -\frac{\partial\xi^3}{\partial q^3} = -a,$$

neboť víme, že ξ^3 je funkcí pouze q^3 a to pouze funkcí lineární, což vyplývá z podmínek pro jednotlivé komponenty vektorového pole ξ. Nyní zderivujeme (4) podle proměnné q^1:

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial q^1} = -\frac{d\xi_0}{dt} - \frac{\partial\xi^3}{\partial q^3}$$

a dosadíme do rovnice (3a):

$$-\frac{d\xi_0}{dt} - \frac{\partial\xi^3}{\partial q^3} + \frac{\partial\xi^3}{\partial q^3} - \frac{d\xi_0}{dt} = 0.$$

Z této rovnice vyplývá, že $\xi_0 = C_1$ a také, že $A(t) = 0$. Po dosazení do vztahu (4) dostáváme, že $\xi^1 = -q^1 \cdot a$ a dosazením do rovnice (3c):

$$q^3 \cdot \left(-q^1 \cdot a\right) + q^1\left(a \cdot q^3 + b\right) = 0,$$

z čehož dostáváme, že $b = 0$ a tedy dostáváme vyjádření pro komponentu ξ^3 vektorového pole ξ ve tvaru: $\xi^3 = a \cdot q^3$. Nakonec z rovnice (3b) vyjádříme a dopočítáme ξ^2:

$$\xi^2 = \frac{\partial \xi^1}{\partial t} - q^2 \frac{\partial \xi^3}{\partial q^3} = -q^2 \cdot a.$$

Dosadíme-li zpět do parciálních diferenciálních rovnic (3), zjistíme, že jsou tyto rovnice splněny, tedy nedostáváme již žádnou další podmínku a symetrie daného Lagrangiánu mají tvar:

$$\xi = C_1 \frac{\partial}{\partial t} - a \cdot \left(q^1 \frac{\partial}{\partial q^1} + q^2 \frac{\partial}{\partial q^2} - q^3 \frac{\partial}{\partial q^3} \right).$$

Noetherovské symetrie tedy tvoří dvouparametrickou grupu s parametry C_1 a a.
Nyní určíme odpovídající zákony zachování. $F = i_\xi \theta_\lambda$, kde

$$\theta_\lambda = \left(q^1 q^3 - \dot{q}^1 \dot{q}^3\right)dt + \dot{q}^3 dq^1 + \left(\dot{q}^1 - q^2\right)dq^3.$$

Pro časovou translaci generovanou vektorovým polem $\frac{\partial}{\partial t}$ dostáváme: $F = \left(q^1 q^3 - \dot{q}^1 \dot{q}^3\right) =$ -H, kde H je Hamiltonián. Pro prostorovou translaci generovanou vektorovým polem $q^1 \frac{\partial}{\partial q^1} + q^2 \frac{\partial}{\partial q^2} - q^3 \frac{\partial}{\partial q^3}$, dostáváme:

$$F = q^1 \dot{q}^3 + \left(\dot{q}^1 - q^2\right) \cdot q^3 = p_1 \cdot q^1 + p_3 \cdot q^3,$$

což je výsledek shodující se se závěry uvedenými v [1].

Nyní určíme symetrie odpovídající Eulerovy-Lagrangeovy formy. Vyjdeme z rovnice Noetherové-Bessel-Hagenovy, která má ve fibrovaných souřadnicích následující tvar:

$$E_k \frac{\partial \xi^k}{\partial q^i} + E_i \dot{\xi}_0 + \frac{\partial E_i}{\partial t} \xi_0 + \frac{\partial E_i}{\partial q^k} \xi^k + \frac{\partial E_i}{\partial \dot{q}^k} \left(\dot{\xi}^k - \dot{q}^k \dot{\xi}^0\right) + \frac{\partial E_i}{\partial \ddot{q}^k} \left(\ddot{\xi}^k - 2\ddot{q}^k \dot{\xi}_0 - \dot{q}^k \ddot{\xi}_0\right) = 0,$$

přičemž v našem případě:

$$E_1 = q^3 - \ddot{q}^3 \qquad E_2 = -\dot{q}^3 \qquad E_3 = q^1 + \dot{q}^2 - \ddot{q}^1.$$

Rozepíšeme rovnice pro dané Eulerovy–Lagrangeovy výrazy, provedeme příslušné parciální derivace 1-forem E_i a jelikož víme, že

$$\xi_0 = \xi_0(t),\ \xi^1 = \xi^1(t, q^1, q^2, q^3),\ \xi^2 = \xi^2(t, q^1, q^2, q^3) \text{ a } \xi^3 = \xi^3(t, q^1, q^2, q^3),$$

dostáváme následující tři parciální diferenciální rovnice:

$$q^3 \frac{\partial \xi^1}{\partial q^1} - \ddot{q}^3 \frac{\partial \xi^1}{\partial q^1} - \dot{q}^3 \frac{\partial \xi^2}{\partial q^1} + q^1 \frac{\partial \xi^3}{\partial q^1} - \ddot{q}^1 \frac{\partial \xi^3}{\partial q^1} + \dot{q}^2 \frac{\partial \xi^3}{\partial q^1} + q^3 \frac{d\xi_0}{dt} - \ddot{q}^3 \frac{d\xi_0}{dt} - \frac{\partial^2 \xi^3}{\partial t^2} - 2\dot{q}^1 \frac{\partial^2 \xi^3}{\partial t \partial q^1} -$$

$$- 2\dot{q}^2 \frac{\partial^2 \xi^3}{\partial t \partial q^2} - 2\dot{q}^3 \frac{\partial^2 \xi^3}{\partial t \partial q^3} - \frac{\partial^2 \xi^3}{\partial q_2^1}\left(\dot{q}^1\right)^2 - \frac{\partial^2 \xi^3}{\partial q_2^2}\left(\dot{q}^2\right)^2 - \frac{\partial^2 \xi^3}{\partial q_2^3}\left(\dot{q}^3\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \xi^3}{\partial q^1 \partial q^2} \dot{q}^1 \dot{q}^2 -$$

$$- 2\frac{\partial^2 \xi^3}{\partial q^1 \partial q^3} \dot{q}^1 \dot{q}^3 - 2\frac{\partial^2 \xi^3}{\partial q^2 \partial q^3} \dot{q}^2 \dot{q}^3 + 2\ddot{q}^3 \frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \xi^3 + \dot{q}^3 \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t^2} - \frac{\partial \xi^3}{\partial q^1} \ddot{q}^1 - \frac{\partial \xi^3}{\partial q^2} \ddot{q}^2 - \frac{\partial \xi^3}{\partial q^3} \ddot{q}^3 = 0$$

$$q^3 \frac{\partial \xi^1}{\partial q^1} - \ddot{q}^3 \frac{\partial \xi^1}{\partial q^1} - \dot{q}^3 \frac{\partial \xi^2}{\partial q^1} + q^1 \frac{\partial \xi^3}{\partial q^1} - \ddot{q}^1 \frac{\partial \xi^3}{\partial q^1} + \dot{q}^2 \frac{\partial \xi^3}{\partial q^1} - \dot{q}^3 \frac{d\xi_0}{dt} - \frac{\partial \xi^3}{\partial t} - \dot{q}^1 \frac{\partial \xi^3}{\partial q^1} - \dot{q}^2 \frac{\partial \xi^3}{\partial q^2} - \dot{q}^3 \frac{\partial \xi^3}{\partial q^3} + \dot{q}^3 \frac{\partial \xi_0}{\partial t} = 0$$

$$q^3 \frac{\partial \xi^1}{\partial q^1} - \ddot{q}^3 \frac{\partial \xi^1}{\partial q^1} - \dot{q}^3 \frac{\partial \xi^2}{\partial q^1} + q^1 \frac{\partial \xi^3}{\partial q^1} - \ddot{q}^1 \frac{\partial \xi^3}{\partial q^1} + \dot{q}^2 \frac{\partial \xi^3}{\partial q^1} + q^1 \frac{d\xi_0}{dt} - \ddot{q}^1 \frac{d\xi_0}{dt} + \dot{q}^2 \frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \xi^1 +$$
$$\frac{\partial \xi^2}{\partial t} + \frac{\partial \xi^2}{\partial q^1}\dot{q}^1 + \frac{\partial \xi^2}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial \xi^2}{\partial q^3}\dot{q}^3 - \dot{q}^2 \frac{\partial \xi_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial t^2} - 2\dot{q}^1 \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial t \partial q^1} - 2\dot{q}^2 \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial t \partial q^2} - 2\dot{q}^3 \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial t \partial q^3} -$$
$$- \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial q_2^1}\left(\dot{q}^1\right)^2 - \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial q_2^2}\left(\dot{q}^2\right)^2 - \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial q_2^3}\left(\dot{q}^3\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \xi^1}{\partial q^1 \partial q^2}\dot{q}^1\dot{q}^2 - 2\frac{\partial^2 \xi^1}{\partial q^1 \partial q^3}\dot{q}^1\dot{q}^3 - 2\frac{\partial^2 \xi^1}{\partial q^2 \partial q^3}\dot{q}^2\dot{q}^3 +$$
$$+ 2\ddot{q}^1 \frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \dot{q}^1 \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t^2} - \frac{\partial \xi^1}{\partial q^1}\ddot{q}^1 - \frac{\partial \xi^1}{\partial q^2}\ddot{q}^2 - \frac{\partial \xi^1}{\partial q^3}\ddot{q}^3 = 0$$

Z uvedených rovnic dostáváme také systémy parciálních diferenciálních rovnic, které řešíme analogickým způsobem jako v případě hledání symetrií Lagrangiánu a po mnoha výpočtech dostáváme vyjádření jednotlivých komponent vektorového pole ξ, které má tvar:

$$\xi = C_1 \frac{\partial}{\partial t} + \left(k_1 \cdot e^t + k_2 \cdot e^{-t} - C_2 \cdot q^1\right)\frac{\partial}{\partial q^1} + \left(-C_2 \cdot q^2 + C_3 + b(q^3)\right)\frac{\partial}{\partial q^2} + C_2 q^3 \frac{\partial}{\partial q^3},$$

kde C_1, C_2, C_3, k_1 a k_2 jsou konstanty a $b(q^3)$ je funkce závislá pouze na proměnné q^3. Vidíme tedy, že Notherovské symetrie tvoří podmnožinu grupy symetrií získaných z rovnice Notherové-Bessel-Hagenovy.

Výsledky a závěr

V této práci jsme korektním způsobem nalezli všechny bodové symetrie daného systému rovnic. Tohoto výsledku v [1] nebylo dosaženo, protože metoda, která byla autory v článku použita, dokázala nalézt pouze odpovídající Noetherovské symetrie, které jsou pouze malou podmnožinou úplného řešení problému.

Poděkování

Velice ráda bych poděkovala Prof. RNDr. Olze Rossi, DrSc., za trpělivost, cenné rady a připomínky, které velkou měrou přispěly ke zvýšení kvality tohoto příspěvku.

Literatura

[1] EL-ZALAN H.A., MUSLIH S.I., ELSABAA F.M.F., *The Hamiltonian- Jacobi analysis of dynamical system with singular higher order Lagrangians*, Hadronic Journal 30, 2007

[2] KRUPKOVÁ O., A geometric setting for higher-order Dirac-Bergmann theory of constraints, J. Math. Phys. 35, (1994) 6557-6576

[3] KRUPKOVÁ O., *The Geometry of Ordinary Variational Equations*, Springer, 1997

Abstract

In this paper the symmetry of singular Lagrangians by using the Noether's equation and the symmetry of corresponding Euler-Lagrange equations by using the Noether-Bessel-Hagen equation are studied. The dynamics of singular Lagrangians is difficult but the theory of symmetries (Noether’s theorem) allows to solve the problem of finding symmetries as well as in the regular case.