



UNIVERSITAS
OSTRAVIENSIS

GEOGEBRA AS AN ASSISTANT IN SOLVING PROBLEMS OF LINEAR OPTIMIZATION

Pavel Molnár

P. J. Šafárik University in Košice, Faculty of science, Slovakia

Úvod

- Markus Hohenwarter (2001);
- mobilná platforma – tablety, mobilné telefony;
- GeoGebra dáva príležitosť preniesť reálny svet do vyučovania matematiky;
- výskumy k využívaniu DGS vo vyučovaní matematiky.

Experimentálna výučba

- výučba na gymnáziu v Košiciach (február 2016);
- matematická trieda (1. ročník);
- 16 chlapcov a 9 dievčat;
- 2 vyučovacie hodiny (2 pracovné listy):
 - 1. hodina – grafické riešenie sústavy nerovnic, prostredie programu GeoGebra, problematika LO;
 - 2. hodina – slovné úlohy na LO.

Úloha 1

- Firma FarLak vyrába 2 druhy farieb: Z a V, ktoré predáva po 5000 a 2000 EUR za tonu. Firma používa 2 druhy surovín: A a B, ktorých zásoby predstavujú 6t (A) a 5t (B). Na jednu tonu farby Z sú potrebné 3 diely suroviny A a 1 diel suroviny B. Na výrobu jednej tony farby V sú potrebné 2 diely suroviny A a 2 diely suroviny B. Koľko ktorej farby má firma FarLak vyrobiť, ak chce zarobiť čo najviac?*

Úloha 1

Firma FarLak vyrába 2 druhy farieb: Z a V, ktoré predáva po 5000 a 2000 EUR za tonu. Firma používa 2 druhy surovín: A a B, ktorých zásoby predstavujú 6t (A) a 5t (B). Na jednu tonu farby Z sú potrebné 3 diely suroviny A a 1 diel suroviny B. Na výrobu jednej tony farby V sú potrebné 2 diely suroviny A a 2 diely suroviny B. Koľko ktorej farby má firma FarLak vyrobiť, ak chce zarobiť čo najviac?

	Farba Z	Farba V	Zásoby (t)
Surovina A	3/4	2/4	6
Surovina B	1/4	2/4	5
Cena (EUR)	5000	2000	-----
Množstvo (t)	x	y	-----

Úloha 1

- Firma FarLak vyrába 2 druhy farieb: Z a V, ktoré predáva po 5000 a 2000 EUR za tonu. Firma používa 2 druhy surovín: A a B, ktorých zásoby predstavujú 6t (A) a 5t (B). Na jednu tonu farby Z sú potrebné 3 diely suroviny A a 1 diel suroviny B. Na výrobu jednej tony farby V sú potrebné 2 diely suroviny A a 2 diely suroviny B. Koľko ktorej farby má firma FarLak vyrobiť, ak chce zarobiť čo najviac?*

	Farba Z	Farba V	Zásoby (t)
Surovina A	3/4	2/4	6
Surovina B	1/4	2/4	5
Cena (EUR)	5000	2000	-----
Množstvo (t)	x	y	-----

- sústava nerovnic:
$$\frac{3}{4}x + \frac{2}{4}y \leq 6$$
$$\frac{1}{4}x + \frac{2}{4}y \leq 5 \quad (*)$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0 \quad (*)$$

Úloha 1

- Firma FarLak vyrába 2 druhy farieb: Z a V, ktoré predáva po 5000 a 2000 EUR za tonu. Firma používa 2 druhy surovín: A a B, ktorých zásoby predstavujú 6t (A) a 5t (B). Na jednu tonu farby Z sú potrebné 3 diely suroviny A a 1 diel suroviny B. Na výrobu jednej tony farby V sú potrebné 2 diely suroviny A a 2 diely suroviny B. Koľko ktorej farby má firma FarLak vyrobiť, ak chce zarobiť čo najviac?

	Farba Z	Farba V	Zásoby (t)
Surovina A	3/4	2/4	6
Surovina B	1/4	2/4	5
Cena (EUR)	5000	2000	-----
Množstvo (t)	x	y	-----

- sústava nerovnic:
$$\frac{3}{4}x + \frac{2}{4}y \leq 6$$
$$\frac{1}{4}x + \frac{2}{4}y \leq 5 \quad (*)$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0 \quad (*)$$
- predpis cieľovej funkcie: $f(x, y) = 5000x + 2000y \rightarrow$ maximalizovať

Úloha 1

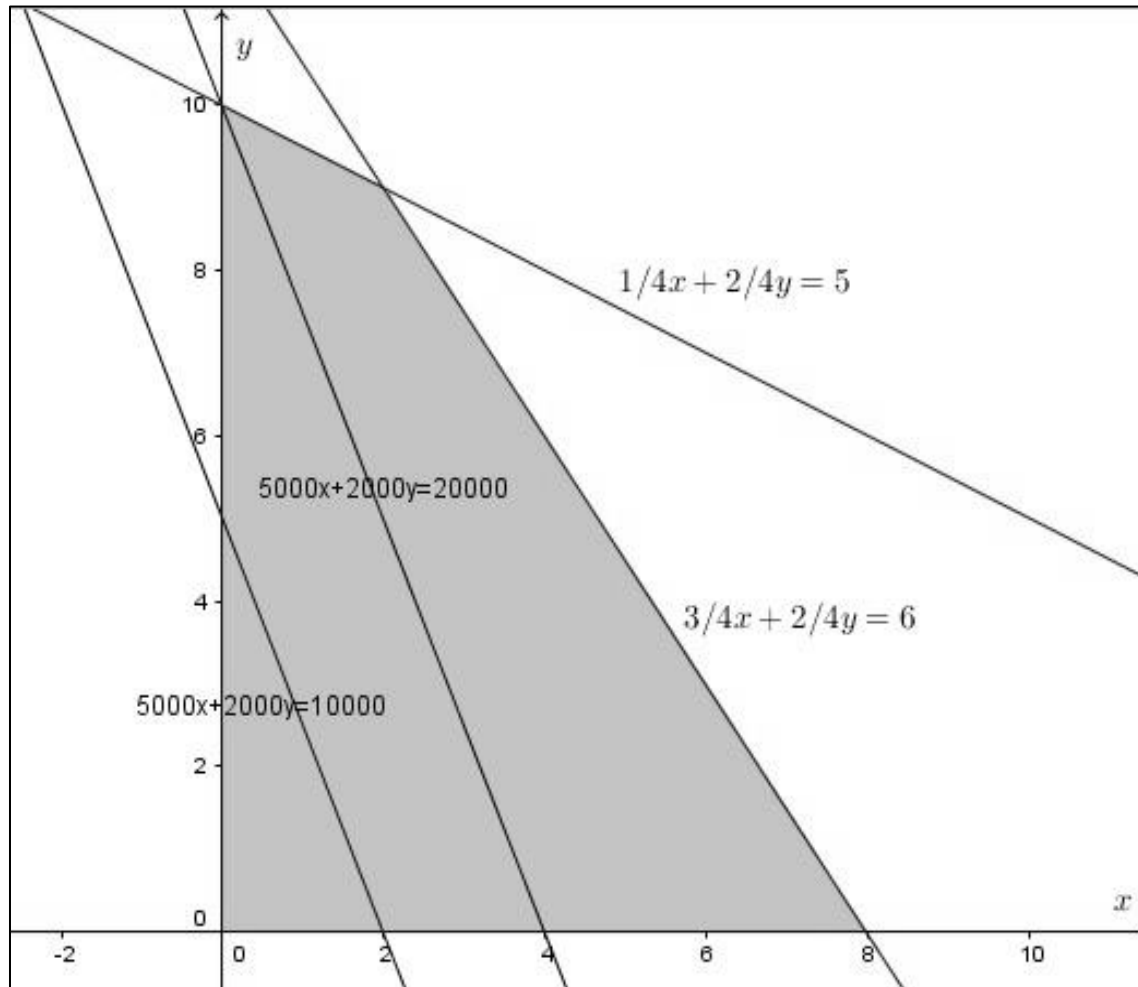
- Firma FarLak vyrába 2 druhy farieb: Z a V, ktoré predáva po 5000 a 2000 EUR za tonu. Firma používa 2 druhy surovín: A a B, ktorých zásoby predstavujú 6t (A) a 5t (B). Na jednu tonu farby Z sú potrebné 3 diely suroviny A a 1 diel suroviny B. Na výrobu jednej tony farby V sú potrebné 2 diely suroviny A a 2 diely suroviny B. Koľko ktorej farby má firma FarLak vyrobiť, ak chce zarobiť čo najviac?

	Farba Z	Farba V	Zásoby (t)
Surovina A	3/4	2/4	6
Surovina B	1/4	2/4	5
Cena (EUR)	5000	2000	-----
Množstvo (t)	x	y	-----

- sústava nerovnic:
$$\frac{3}{4}x + \frac{2}{4}y \leq 6$$
$$\frac{1}{4}x + \frac{2}{4}y \leq 5 \quad (*)$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0 \quad (*)$$
- predpis cieľovej funkcie: $f(x, y) = 5000x + 2000y \rightarrow$ maximalizovať
- zápis do vstupného riadku v GeoGebre:

$$(3/4x + 2/4y \leq 6) \wedge (1/4x + 2/4y \leq 5) \wedge (x \geq 0) \wedge (y \geq 0)$$

Úloha 1



Úloha 1

- *Firma FarLak vyrába 2 druhy farieb: Z a V, ktoré predáva po 5000 a 2000 EUR za tonu. Firma používa 2 druhy surovín: A a B, ktorých zásoby predstavujú 6t (A) a 5t (B). Na jednu tonu farby Z sú potrebné 3 diely suroviny A a 1 diel suroviny B. Na výrobu jednej tony farby V sú potrebné 2 diely suroviny A a 2 diely suroviny B. Koľko ktorej farby má firma FarLak vyrobiť, ak chce zarobiť čo najviac?*
- všetkých 25 žiakov vedelo správne zakresliť priamku predstavujúcu maximálnu tržbu;
- 11 žiakov nezapísalo odpoveď;
- 7 žiakov zapísalo celú odpoveď a 7 žiakov zapísalo výsledok v tvare $x=...$ a $y=...$;
- porozumenie geometrického modelu pre maximalizáciu.

Úloha 2

- Pri výskume rozvoja živočíšnej výroby sa zistilo, že výkrm poľnohospodárskych zvierat je veľmi výhodný, ak v denných dávkach bude každé zviera dostávať aspoň 6 jednotiek živín A, minimálne 12 jednotiek živín B a aspoň 4 jednotky živín C. Na výkrm sa používajú dva druhy krmív K_1 a K_2 , pričom jeden kilogram krmiva K_1 obsahuje 2 jednotky živiny A, 2 jednotky živiny B a žiadnu jednotku živiny C a jeden kilogram krmiva K_2 obsahuje 1 jednotku živiny A, 4 jednotky živiny B a 4 jednotky živiny C. Ďalej vieme, že za 1kg krmiva K_1 sa platí 0,50 EUR a za 1kg krmiva K_2 sa platí 0,60 EUR. Ako treba podávať krmivá jatočným zvieratám, teda aké množstvo kilogramov K_1 a K_2 dať jednému zvieraťu, aby náklady na výkrm boli minimálne?*

Úloha 2

Pri výskume rozvoja živočíšnej výroby sa zistilo, že výkrm poľnohospodárskych zvierat je veľmi výhodný, ak v denných dávkach bude každé zviera dostávať aspoň 6 jednotiek živín A, minimálne 12 jednotiek živín B a aspoň 4 jednotky živín C. Na výkrm sa používajú dva druhy krmív K_1 a K_2 , pričom jeden kilogram krmiva K_1 obsahuje 2 jednotky živiny A, 2 jednotky živiny B a žiadnu jednotku živiny C a jeden kilogram krmiva K_2 obsahuje 1 jednotku živiny A, 4 jednotky živiny B a 4 jednotky živiny C. Ďalej vieme, že za 1kg krmiva K_1 sa platí 0,50 EUR a za 1kg krmiva K_2 sa platí 0,60 EUR. Ako treba podávať krmivá jatočným zvieratám, teda aké množstvo kilogramov K_1 a K_2 dať jednému zvieraťu, aby náklady na výkrm boli minimálne?

	Krmivo K_1	Krmivo K_2	Minimálne množstvo
Živina A	2 (*)	1	6
Živina B	2 (*)	4 (*)	12 (*)
Živina C	0	4 (*)	4 (*)
Cena (EUR)	0,50 (*)	0,60 (*)	-----
Množstvo	x	y	-----

Úloha 2

- sústava nerovníc:

$$2x + 1y \geq 6$$

$$2x + 4y \geq 12 \quad (*)$$

$$0x + 4y \geq 4 \quad (*)$$

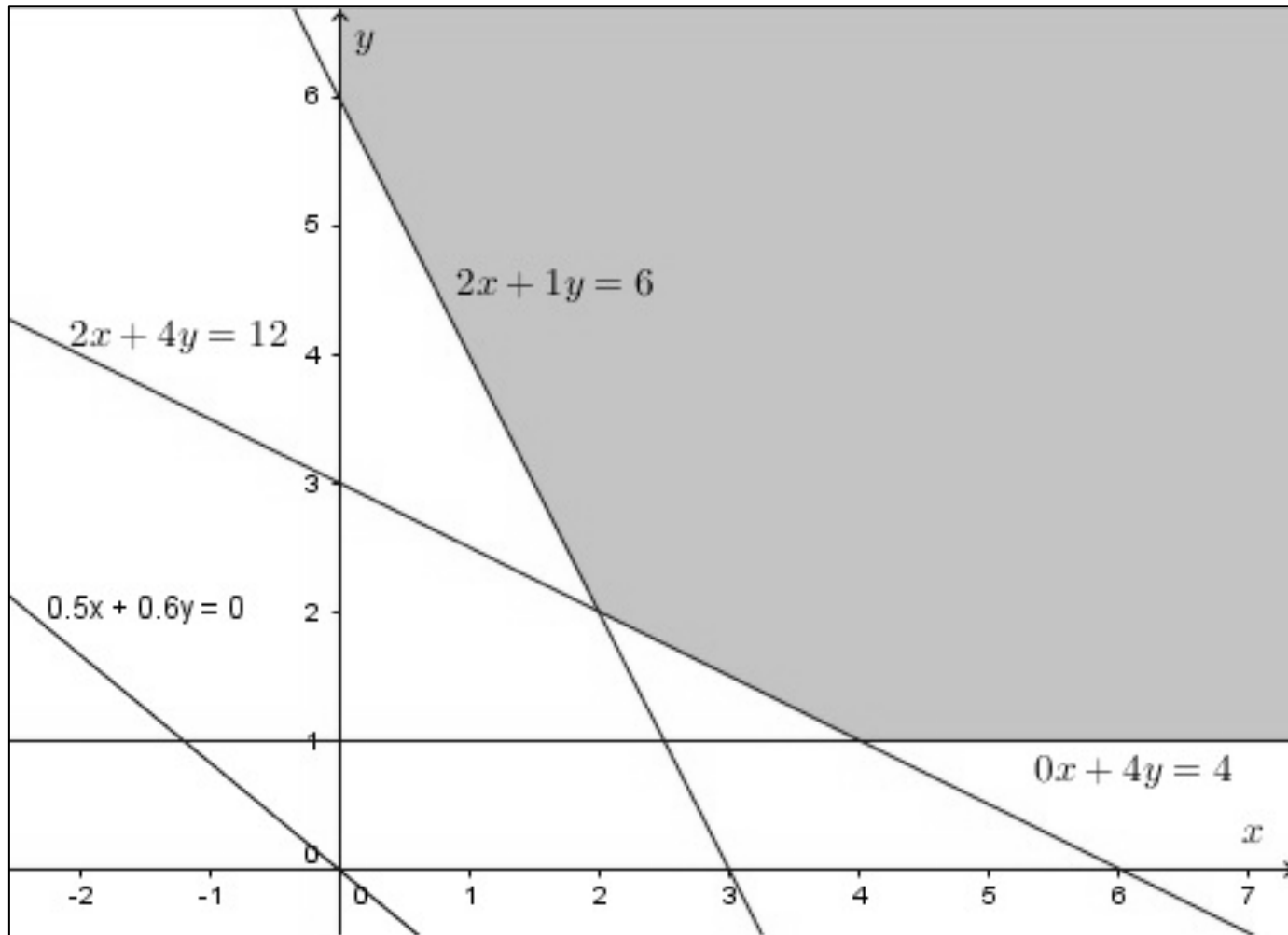
$$x \geq 0 \quad (*)$$

$$y \geq 0 \quad (*)$$

- predpis cieľovej funkcie:

$$f(x, y) = 0,50x + 0,60y \rightarrow \textit{minimalizovať} \quad (*)$$

Úloha 2



Úloha 2

- *Pri výskume rozvoja živočíšnej výroby sa zistilo, že výkrm poľnohospodárskych zvierat je veľmi výhodný, ak v denných dávkach bude každé zviera dostávať aspoň 6 jednotiek živín A, minimálne 12 jednotiek živín B a aspoň 4 jednotky živín C. Na výkrm sa používajú dva druhy krmív K_1 a K_2 , pričom jeden kilogram krmiva K_1 obsahuje 2 jednotky živiny A, 2 jednotky živiny B a žiadnu jednotku živiny C a jeden kilogram krmiva K_2 obsahuje 1 jednotku živiny A, 4 jednotky živiny B a 4 jednotky živiny C. Ďalej vieme, že za 1kg krmiva K_1 sa platí 0,50 EUR a za 1kg krmiva K_2 sa platí 0,60 EUR. Ako treba podávať krmivá jatočným zvieratám, teda aké množstvo kilogramov K_1 a K_2 dať jednému zvieraťu, aby náklady na výkrm boli minimálne?*
- doplnenie tabuľky na základe zadania úlohy;
- modifikácia geometrického modelu na hľadanie minimálneho riešenia;
 - 3 žiaci nedokázali správne zakresliť hraničnú priamku a teda doriešiť príklad;
- žiaci znova nezapísali odpovede (10).

Úloha 3

- Podnikateľ vo svojej dielničke vyrába dva typy výrobkov: výrobok A, výrobok B. Zamestnáva dvoch zamestnancov, ktorých produktivita je približne rovnaká. Výroba jedného výrobku A trvá 4 hodiny, jeho záverečné opracovanie trvá 2 hodiny, pri výrobku B je to 9 hodín na výrobu a 1 hodina na záverečné opracovanie. Každý kus výrobku zaberá na sklade 1 m^3 a kapacita skladu je 12 m^3 . Na výrobu výrobkov má podnikateľ maximálne 90 hodín, na záverečné opracovanie maximálne 20 hodín. Zisk z predaja jedného výrobku A je 65 EUR, výrobku B je 48 EUR. Koľko kusov, a ktorých výrobkov má podnikateľ vyrobiť, aby bol zisk maximálny?*

Úloha 3

- *Podnikateľ vo svojej dielničke vyrába dva typy výrobkov: výrobok A, výrobok B. Zamestnáva dvoch zamestnancov, ktorých produktivita je približne rovnaká. Výroba jedného výrobku A trvá 4 hodiny, jeho záverečné opracovanie trvá 2 hodiny, pri výrobku B je to 9 hodín na výrobu a 1 hodina na záverečné opracovanie. Každý kus výrobku zaberá na sklade 1 m^3 a kapacita skladu je 12 m^3 . Na výrobu výrobkov má podnikateľ maximálne 90 hodín, na záverečné opracovanie maximálne 20 hodín. Zisk z predaja jedného výrobku A je 65 EUR, výrobku B je 48 EUR. Koľko kusov, a ktorých výrobkov má podnikateľ vyrobiť, aby bol zisk maximálny?*
- **zostavenie tabuľky (traja žiaci nevedeli zostaviť tabuľku);**

Úloha 3

Riešenie:

Doplňte tabuľku:

	A	B B	
výroba A	6h	10h	
výroba B			

Zapište podmienky:

Úloha 3

- *Podnikateľ vo svojej dielničke vyrába dva typy výrobkov: výrobok A, výrobok B. Zamestnáva dvoch zamestnancov, ktorých produktivita je približne rovnaká. Výroba jedného výrobku A trvá 4 hodiny, jeho záverečné opracovanie trvá 2 hodiny, pri výrobku B je to 9 hodín na výrobu a 1 hodina na záverečné opracovanie. Každý kus výrobku zaberá na sklade 1 m^3 a kapacita skladu je 12 m^3 . Na výrobu výrobkov má podnikateľ maximálne 90 hodín, na záverečné opracovanie maximálne 20 hodín. Zisk z predaja jedného výrobku A je 65 EUR, výrobku B je 48 EUR. Koľko kusov, a ktorých výrobkov má podnikateľ vyrobiť, aby bol zisk maximálny?*
- zostavenie tabuľky (traja žiaci nevedeli zostaviť tabuľku);
- žiaci, ktorí zostavili tabuľku, vedeli zapísať sústavu nerovníc;
- domáca úloha – nainštalovať GeoGebru a doriešiť úlohu.

Závery

- žiaci sa počas experimentu stretli s GeoGebrou **prvýkrát v živote** a predsa zvládli vytvorenie geometrického modelu;
- pri poslednej úlohe bola badateľná **zvýšená aktivita** (možnosť doriešiť úlohu na NB v škole);
- GeoGebra zjavne žiakov **zaujala**, keďže sa experimentálna výučba konala v piatok a žiaci v priebehu víkendu posielali svoje riešenia (mali na to týždeň);
- za najväčší prínos pokladali žiaci **rýchlosť** a **presnosť** GeoGebry;
- väčší záujem o GeoGebrou prejavili **chlapci**;
- pre nás je najväčším prínosom **zvýšená motivácia** a **snaha** riešiť úlohy pomocou programu GeoGebra;
- najväčším problémom bola **interpretácia výsledkov, zapísanie slovnej odpovede**;
- **motivácia žiakov** pre riešenie úloh a pre prácu s GeoGebrou.

ĎAKUJEM ZA POZORNOSŤ

This work was supported by the Slovak Research and Development Agency under the contract No. APVV-0715-12.

Pavel MOLNÁR

P. J. Šafárik University in Košice, Faculty of science, Slovakia

pavel.molnar@student.upjs.sk