DEFORMACE JEDNODUCHÝCH LAGRANGEOVÝCH SYSTÉMŮ VYBRANÝMI NEHOLONOMNÍMI VAZBAMI

Karolína Šebová
Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita v Ostravě, 30. dubna 22, 701 03 Ostrava,
carolina.sebova@seznam.cz

Abstrakt

Příspěvek je výňatkem z diplomové práce, která se zabývá zkoumáním vlivu neholonomních vazeb na Lagrangeovy systémy. V první části příspěvku jsou uvedeny základní pojmy z oblasti neholonomních vazeb na fibrovaných varietách. Pro posouzení vlivu neholonomních vazeb na výsledný pohyb mechanického systému se zavádí některé kinematické parametry, mezi něž patří např. vzdálenostní odchylka nebo směrová odchylka, které porovnávají izochronní body na vázané a nevázané trajektorii začínajících při stejných počátečních podmínkách. Při samotném studiu vlivu neholonomních vazeb na Lagrangeovské systémy se vyskytly určité typy vazeb neovlivňující vůbec výsledný pohyb mechanického systému, který pak probíhá jako by byl nevázaný. Takové vazby jsme nazvali ignorabilními. Jejich význam pak fakticky spočívá pouze v omezení volby počátečních podmínek. V druhé části je prezentována konkrétní „ignorabilní" vazba pro kinetický Lagrangián.

Klíčová slova: *Neholonomní vazba; ignorabilní vazba; kinetický Lagrangián;vázaná trajektorie; nevázaná trajektorie.*

Úvod

V klasické mechanice se vyskytují různé podmínky omezující pohyb mechanického systému, tyto podmínky se nazývají vazby. Zkoumání vlivu vazby na pohyb mechanického systému probíhá porovnáním různých kinematických parametrů vázané a příslušné nevázané trajektorie při stejných počátečních podmínkách, mohou to být například vzdálenostní a směrové odchylky. Ignorabilní vazba je taková vazba, pro kterou jsou veškeré odchylky vázané a nevázané trajektorie pohybu systému nulové.

Mějme fibrovanou varietu $\pi: Y \to X$, $\dim X = 1$, $\dim Y = m + 1$. Nechť je na varietě Y zadán fibrovaný souřadnicový systém $(V, \psi), \psi = (t, q^\sigma)$ a s ním asociovaný souřadnicový sytém $(U, \varphi), \varphi = (t)$ na varietě X. Dále mějme první prodloužení J^1Y fibrované variety π. V tomto příspěvku se zabývám systémem volných částic, pracujeme tedy s tzv. kinetickým Lagrangiánem $\lambda = L\mathrm{d}t$, kde Lagrangeova funkce L je rovna kinetické energii T, tedy

$$L = T = \frac{1}{2} M((\dot{q}^1)^2 + \cdots + (\dot{q}^m)^2).$$

Vazbami rozumíme podmínky, které omezují možnou geometrickou polohu mechanického systému, případně jeho pohyb. Neholonomní vazby představují podmínky, které obecně závisejí na zobecněných souřadnicích na konfiguračním prostoru, na zobecněných komponentách rychlosti a obecně i na čase. Obvykle se vyjadřují ve tvaru k diferenciálních rovnic prvního řádu

$$f^i(t, q^1, \dots, q^m, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m) = 0, \qquad 1 \le i \le k, \tag{1}$$

kde $k < m$.[2]

Speciálním typem neholonomních vazeb jsou vazby semiholonomní, u kterých je příslušný systém diferenciálních rovnic (1) integrabilní. Vazebnou podvarietou Q na J^1Y rozumíme fibrovanou podvarietu $\pi_{1,0}|_Q: Q \to Y$ fibrované variety $\pi_{1,0}: J^1Y \to Y$. Vazebná podvarieta Q je lokálně vyjádřena rovnicemi (1), kde o funkcích f^i definovaných na J^1Y předpokládáme, že splňují podmínku

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma}\right) = k.$$

Pro výpočet vázané trajektorie jsem zvolila tvz. „externí přístup“, který pracuje s vazebnou silou definovanou na okolí vazebné podvariety Q v J^1Y. Vliv vazby na pohyb mechanického systému je realizován prostřednictvím Chetaeovy vazebné síly, pro jejíž komponenty platí

$$\Phi^\sigma = \mu_i \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma}, \qquad 1 \le i \le k,$$

kde μ_i jsou Lagrangeovy multiplikátory. Rovnice pro pohyb mechanického systému jsou potom Euler-Lagrangeovy rovnice, kdy na pravou stranu jsou doplněny příslušné komponenty Chetaeovy vazebné síly, a dále rovnice samotné vazby. Tyto rovnice jsou nazývány deformované rovnice a mají následující tvar

$$\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} = \mu_i \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma},$$
$$f^i(t, q^1, \dots, q^m, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m) = 0.$$

Jedná se o systém $m + k$ obyčejných diferenciálních rovnic prvního a druhého řádu pro m komponent $q^\sigma(t)$ vázaných trajektorií a k Lagrangeových multiplikátorů μ_i. Vyloučením Lagrangeových multiplikátorů z deformovaných rovnic obdržíme systém m diferenciálních rovnic pro komponenty $q^\sigma(t)$ vázaných trajektorií. Tento systém bez rovnic vazby (tedy systém $m - k$ obyčejných diferenciálních rovnic) se nazývá redukované rovnice a jsou to již rovnice definované na vazebné podvarietě Q.[1]

V tomto příspěvku uvažujeme mechanické systémy na fibrované varietě $\pi: R \times R^m \to R^m$. První prodloužení $J^1(R \times R^m)$ této fibrované variety je pak fibrovaná varieta $\pi_1: J^1(R \times R^m) = = R \times R^m \times R^m \to R$. Pro posouzení vlivu vazby na pohyb mechanického systému uvažovaného na této fibrované varietě lze využít různé kinematické parametry.

V tomto příspěvku využíváme vzdálenostní odchylku a směrovou odchylku. Vzdálenostní odchylka udává vzdálenost izochronních bodů na nevázané trajektorii γ a příslušné vázané trajektorii $\bar{\gamma}$ začínajících při stejných počátečních podmínkách. Jelikož každý fibr $\pi^{-1}(t)$ je kartézský prostor R^m vybavený standardní Euklidovskou metrikou, je možno vzdálenostní odchylku ρ vypočítat pomocí vztahu

$$\rho(\gamma, \bar{\gamma}) = \sqrt{\left(q^1(t) - \bar{q}^1(t)\right)^2 + \cdots + \left(q^m(t) - \bar{q}^m(t)\right)^2},$$

kde $\bar{q}^\sigma(t)$ značí komponenty vázané trajektorie v čase t a $q^\sigma(t)$ značí komponenty nevázané trajektorie v čase t.

Jelikož tečné prostory $T_{(t,\gamma(t))}Y = \{[t, \gamma(t)]\} \times R^m$ a $T_{(t,\bar{\gamma}(t))}Y = \{[t, \bar{\gamma}(t)]\} \times R^m$ jsou izomorfní s m-rozměrným vektorovým prostorem R^m, na kterém je definován standardní skalární součin, je možné zavést další srovnávací kinematický parametr, a tím je směrová odchylka. Směrovou odchylkou Υ rozumíme odchylku směrových vektorů, tzn. úhel, který svírají tečné vektory vázané trajektorie $\bar{\boldsymbol{v}}$ s tečnými vektory nevázané trajektorie $\boldsymbol{v}$ v konkrétním čase t. Směrová odchylka Υ se vypočte s využitím skalárního součinu podle vzorce

$$\cos \Upsilon = \frac{|(\boldsymbol{v}, \overline{\boldsymbol{v}})|}{||\boldsymbol{v}|| \cdot ||\overline{\boldsymbol{v}}||}.$$

Ingorabilní vazbou potom rozumíme vazbu, pro kterou jsou veškeré odchylky nulové – tedy nedochází k deformaci pohybu a vazba se neprojeví. Význam takovéto vazby potom spočívá fakticky pouze v tom, že omezuje volbu počátečních podmínek, ty musí být kompatibilní s vazbou. Charakteristikou ignorabilní vazby je nulová Chetaeova síla, neboť deformované rovnice pro danou vazbu mohou být splněny pouze pro $\mu_i = 0$.

Konkrétním příkladem ignorabilní vazby je vazba reprezentovaná rovnicí

$$\alpha_1 \dot{q}^1 + \cdots + \alpha_m \dot{q}^m = c, \tag{2}$$

kde $\alpha_\sigma, c \in \boldsymbol{R}$ a $c \neq 0$, tedy alespoň jedna konstanta α_σ je různá od nuly (*). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je to například konstanta α_m. Tato vazba je integrabilní, odpovídající vazbou na Y je vazba

$$\alpha_1 q^1 + \cdots + \alpha_m q^m - ct = C,$$

kde C je integrační konstanta, kterou je nutné určit z počátečních podmínek. Tato vazba geometricky představuje pohybující se nadrovinu v $R \times R^m$. Z předpokladu (*) plyne, že funkce (2) vyjadřují vazebnou podvarietu, neboť

$$\operatorname{rank}(\alpha_1, \quad \cdots, \quad \alpha_m) = 1.$$

Chetaeova vazebná síla asociovaná s touto vazbou je potom tvaru

$$\Phi^\sigma = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^\sigma} = \mu \alpha_\sigma.$$

Pro Lagrangián $\lambda = L\mathrm{d}t$, kde Lagrangeova funkce je tvaru

$$L = \frac{1}{2} M((\dot{q}^1)^2 + \cdots + (\dot{q}^m)^2)$$

potom dostáváme tyto deformované rovnice příslušné zadané vazbě

$$-M\ddot{q}^1 = \mu \alpha_1$$
$$\vdots$$
$$-M\ddot{q}^m = \mu \alpha_m$$
$$\alpha_1 \dot{q}^1 + \cdots + \alpha_m \dot{q}^m = c.$$

Vyjádřením multiplikátoru μ z m-té rovnice, dosazením do ostatních rovnic a následnou úpravou obdržíme systém m obyčejných diferenciálních rovnic

$$\ddot{q}^1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_m} \ddot{q}^m$$
$$\vdots$$
$$\ddot{q}^{m-1} = \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} \ddot{q}^m$$
$$\dot{q}^m = \frac{1}{\alpha_m} (c - \alpha_1 \dot{q}^1 - \cdots - \alpha_{m-1} \dot{q}^{m-1}).$$

Pro řešení tohoto systému jsem si nejprve vyjádřila proměnnou $\dot{q}^m$ z rovnice vazby, následně jsem derivací vzniklé rovnice vyjádřila $\ddot{q}^m$ jako

$$\ddot{q}^m = -\frac{1}{\alpha_m} (\alpha_1 \ddot{q}^1 + \cdots + \alpha_{m-1} \ddot{q}^{m-1}), \tag{3}$$

což jsem dále dosadila do rovnice pro $\ddot{q}^{m-1}$

$$\ddot{q}^{m-1} = -\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m^2} (\alpha_1 \ddot{q}^1 + \cdots + \alpha_{m-1} \ddot{q}^{m-1}).$$

Po úpravě a vyjádření $\ddot{q}^{m-1}$ z této rovnice jsem si z rovnice (3) opět vyjádřila $\ddot{q}^m$, ale nyní pouze jako lineární kombinaci $m-2$ proměnných. Takto nově vyjádřené $\ddot{q}^m$ jsem potom dosadila do rovnice pro $\ddot{q}^{m-2}$ a celý postup několikrát opakovala.

Ukázalo se, že proměnnou $\ddot{q}^m$ dostanu vždy ve speciálním tvaru

$$\ddot{q}^m = -\frac{\alpha_m}{\alpha_m^2 + \cdots + \alpha_{m-l}^2}\left(\alpha_1 \ddot{q}^1 + \cdots + \alpha_{m-l-1}\ddot{q}^{m-l-1}\right), \qquad 1 \le l < m-1.$$

Proměnná $\ddot{q}^{m-l}$, pro $1 \le l < m-1$, potom byla vždy tvaru

$$\ddot{q}^{m-l} = -\frac{\alpha_{m-l}}{\alpha_m^2 + \cdots + \alpha_{m-l}^2}\left(\alpha_1 \ddot{q}^1 + \cdots + \alpha_{m-l-1}\ddot{q}^{m-l-1}\right).$$

Nakonec tedy bylo možné dopočítat vyjádření proměnné $\ddot{q}^1$, které je po úpravě tvaru

$$\ddot{q}^1\left(1 + \frac{\alpha_1\alpha_m}{\alpha_m^2 + \cdots + \alpha_2^2}\right) = 0,$$

tedy $\ddot{q}^1 = 0$, což ale dále implikuje $\ddot{q}^2 = \cdots = \ddot{q}^{m-1} = 0$, a tedy řešení pro trajektorie vázaného mechanického systému je

$$\dot{q}^s = K^s$$
$$q^s = K^s t + k^s,$$

pro $1 \le s \le m-1$. Dosazením těchto řešení do rovnice vazby lze vypočítat také q^m, tedy

$$\dot{q}^m = \frac{1}{\alpha_m}\left(c - \alpha_1 K^1 - \cdots - \alpha_{m-1}K^{m-1}\right)$$
$$q^m = \frac{1}{\alpha_m}\left(c - \alpha_1 K^1 - \cdots - \alpha_{m-1}K^{m-1}\right)t + k^m.$$

Nevázaný pohyb je realizován po trajektoriích

$$q^1 = v_{01}t + q_{01}$$
$$\vdots$$
$$q^m = v_{0m}t + q_{0m}.$$

Jelikož počáteční podmínky musí být shodné, tedy $q^\sigma(0) = \bar{q}^\sigma(0)$ a $\dot{q}^\sigma(0) = \dot{\bar{q}}^\sigma(0)$, dostáváme, že vázaný pohyb se realizuje po stejné trajektorii jako nevázaný pohyb. Počáteční podmínky jsou

$$v_{0s} = K^s \qquad q_{0s} = k^s$$
$$v_{0m} = c - \alpha_s K^s \quad q_{0m} = k^m.$$

Veškeré odchylky tedy budou nulové a vazba (2) je ignorabilní.

Výsledky a závěr

Při studiu vlivu neholonomních vazeb na Lagrangeovské systémy se vyskytly určité typy vazeb neovlivňující samotný pohyb, ale „pouze“ omezující volbu počátečních podmínek. Tyto vazby jsme nazvali ignorabilními. Ve svém příspěvku jsem stručně charakterizovala specifika těchto vazeb a uvedla konkrétní příklad takové vazby na m rozměrném prostoru.

Poděkování

Velmi ráda bych poděkovala RNDr. Martinu Swaczynovi, Ph.D., za ochotu, rady a připomínky, které pomohly k vytvoření tohoto příspěvku. Dále bych ráda poděkovala RNDr. Davidu Bartlovi, Ph.D., za připomínky vedoucí ke zkvalitnění tohoto příspěvku.

Literatura

[1] KRUPKOVÁ, O. *Geometric mechanics on nonholonomic submanifolds*. Communications in Mathematics, 2010, Vol. 18, pp. 51-75.
[2] SWACZYNA, M. *Several examples of nonholonomic mechanical systems.* Communications in Mathematics, 2011, Vol. 19, pp. 27-56.

Abstract

The contribution is an extract of my diploma thesis, which is devoted to deformations of simple Lagrangian systems by the means of some selected nonholonomic constraints. First I briefly characterize basic concepts from the theory of nonholonomic constraints on fibred manifolds and I introduce a special type of constraint – ignorable constraint. The ingnorable constraint does not affect the resulting motion of a mechanical system (all deviations are equal to zero), its meaning is that it only restricts the choice of possible initial conditions, which must be compatible with such a constraint. The second part is devoted to an example of such ignorable constraint for a kinetic Lagrangian.