ZOBECNĚNÍ HAHN-BANACHOVY VĚTY

Lenka Ploháková
katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita v Ostravě
30. dubna 22, 701 03 Ostrava, lenka.plohakova@osu.cz

Abstakt Hahn-Banachova věta se obvykle vyslovuje v rámci vektorového prostoru nad tělesem reálných čísel. Připomeneme její algebraickou verzi. Dále uvedeme univerzální větu o alternativě a z ní vyvodíme zobecnění Hahn-Banachovy věty. Z dřívějších výsledků je známo jiné zobecnění Hahn-Banachovy věty, ukážeme, že z nového zobecnění lze získat zobecnění dřívější.

Klíčová slova: *Hahn-Banachova věta, sublineární funkcionál a zobrazení, univerzální věta o alternativě, druhé zobecnění Hahn-Banachovy věty*

Úvod

Nejprve připomeneme klasické znění Hahn-Banachovy věty (její algebraickou verzi, viz [1, věta 2.16]), které uvedeme bez důkazu. Připomeňme, že jestliže W je reálný vektorový prostor, potom funkcionál $p\colon W \to \mathbb{R}$ se nazývá *sublineární* právě tehdy, když pro všechna $x, y \in W$ a všechna nezáporná $a \in \mathbb{R}$ platí $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ a $p(ax) = ap(x)$. Dále připomeňme, že $W^{\#}$ označuje algebraický duál vektorového prostoru W, tj. prostor všech lineárních forem $L\colon W \to \mathbb{R}$ definovaných na prostoru W. Obdobně, je-li $M \subset\subset W$ lineárním podprostorem vektorového prostoru W, potom $M^{\#}$ označuje prostor všech lineárních forem $l\colon M \to \mathbb{R}$ definovaných na M. Nerovnost $l \leq p$ na M resp. $L \leq p$ na W znamená, že $l(x) \leq p(x)$ resp. $L(x) \leq p(x)$ pro všechna $x \in M$ resp. $x \in W$.

Hahn-Banachova věta (algebraická verze). *Nechť M je podprostor reálného vektorového prostoru W, na kterém je dán sublineární funkcionál $p\colon W \to \mathbb{R}$. Potom každou lineární formu $l \in M^{\#}$ splňující $l \leq p$ na M lze rozšířit na lineární formu $L \in W^{\#}$ takovou, že $L = l$ na M a $L \leq p$ na W.*

Zobecnění pomocí univerzální věty o alternativě

Inspirováni prvním zobecněním Hahn-Banachovy věty (viz [7, 8]) budeme uvažovat jiný speciální tvar sublineárního zobrazení. Konkrétně se jedná o tvar zobrazení vystupujícího v univerzální větě o alternativě [7, 8]. Tuto větu zde uvedeme bez důkazu.

Nechť W a V jsou vektorové prostory nad lineárně uspořádaným tělesem $\mathbb{F}$, kde V je navíc lineárně uspořádaný. Dále budeme používat následující označení: pro libovolný vektor $u \in V$ zavedeme zobrazení $\iota u\colon \mathbb{F} \to V$ tak, že pro každé $\lambda \in \mathbb{F}$ položíme $\iota u(\lambda) = \lambda \star u$, kde symbol $\star$ značí skalární násobení na vektorovém prostoru V. Symbolem $\preceq$ označíme uspořádání na vektorovém prostoru V.

Univerzální věta o alternativě. *Nechť γ je lineární zobrazení prostoru W do prostoru V ($\gamma\colon W \to V$), $\beta_{11}, \dots, \beta_{1\nu_1}, \dots, \beta_{n1}, \dots, \beta_{n\nu_n}\colon W \to \mathbb{F}$ jsou lineární formy a $w_1, \dots, w_n \in V$ jsou nezáporné váhy. Potom pro každé $x \in W$ platí*

$$\begin{aligned} \gamma(x) \quad \preceq \quad & \iota w_1 \max\{\beta_{11}(x), \dots, \beta_{1\nu_1}(x)\} + \cdots + \\ & + \iota w_n \max\{\beta_{n1}(x), \dots, \beta_{n\nu_n}(x)\} \end{aligned}$$

právě tehdy, když existují nezáporné vektory $v_{11}, \dots, v_{1\nu_1}, \dots, v_{n1}, \dots, v_{n\nu_n} \in V$*, pro které platí*

$$\gamma = \iota v_{11}\beta_{11} + \dots + \iota v_{1\nu_1}\beta_{1\nu_1} + \dots + \iota v_{n1}\beta_{n1} + \dots + \iota v_{n\nu_n}\beta_{n\nu_n},$$

a

$$v_{i1} + \dots + v_{i\nu_i} = w_i \qquad \text{pro} \quad i = 1, \dots, n.$$

Uvedenou univerzální větu o alternativě nyní využijeme k vyslovení druhého zobecnění Hahn-Banachovy věty.

Hahn-Banachova věta, druhé zobecnění. *Nechť* V *je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem* $\mathbb{F}$*,* W *je vektorový prostor nad tělesem* $\mathbb{F}$ *a* $M \subset\subset W$ *je lineární podprostor prostoru* W*. Dále nechť* $\beta_{11}, \dots, \beta_{1\nu_1}, \dots, \beta_{n1}, \dots, \beta_{n\nu_n}: W \to \mathbb{F}$ *jsou lineární formy,* $p: W \to V$ *je sublineární zobrazení na vektorovém prostoru* W *ve speciálním tvaru* $p(x) = \iota w_1 \max\{\beta_{11}(x), \dots, \beta_{1\nu_1}(x)\} + \dots + \iota w_n \max\{\beta_{n1}(x), \dots, \beta_{n\nu_n}(x)\}$*, kde* $w_1, w_2, \dots, w_n \in V$ *jsou nezáporné váhy, a* $l: M \to V$ *lineární zobrazení na* M *splňující* $l \preceq p$ *na* M*. Potom existuje lineární zobrazení* $L: W \to V$ *tak, že* $L = l$ *na* M *a* $L \preceq p$ *na* W*.*

Důkaz. Nechť $\beta'_{11}, \dots, \beta'_{1\nu_1}, \dots, \beta'_{n1}, \dots, \beta'_{n\nu_n}: M \to \mathbb{F}$ jsou lineární formy, které jsou zúžením lineárních forem $\beta_{11}, \dots, \beta_{1\nu_1}, \dots, \beta_{n1}, \dots, \beta_{n\nu_n}$ na podprostor $M \subset\subset W$, tj., pro každé $x \in W$ platí $\beta'_{ij}(x) = \beta_{ij}(x)$, kde $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, \nu_i$. Víme, že l je lineární a $l \preceq p$ na M, tedy pro každé $x \in M$ platí, že

$$\begin{aligned} l(x) \preceq p(x) \quad = \quad & \iota w_1 \max\{\beta'_{11}(x), \dots, \beta'_{1\nu_1}(x)\} + \cdots + \\ & + \iota w_n \max\{\beta'_{n1}(x), \dots, \beta'_{n\nu_n}(x)\}, \end{aligned}$$

což podle univerzální věty o alternativě (zúžené na podprostor M prostoru W) implikuje existenci nezáporných vektorů $v_{11}, \dots, v_{1\nu_1}, \dots, v_{n1}, \dots, v_{n\nu_n} \in V$ takových, že platí

$$v_{i1} + \dots + v_{i\nu_m} = w_i \qquad \text{pro} \quad i = 1, \dots, n.$$

a

$$l = \iota v_{11}\beta'_{11} + \dots + \iota v_{1\nu_1}\beta_{1\nu'_1} + \dots + \iota v_{n1}\beta'_{n1} + \dots + \iota v_{n\nu_n}\beta'_{n\nu_n},$$

Nyní zobrazení $L: W \to \mathbb{F}$ zavedeme tak, že položíme

$$L = \iota v_{11}\beta_{11} + \dots + \iota v_{1\nu_1}\beta_{1\nu_1} + \dots + \iota v_{n1}\beta_{n1} + \dots + \iota v_{n\nu_n}\beta_{n\nu_n}.$$

Z univerzální věty o alternativě, protože

$$v_{11}, \dots, v_{1\nu_1}, \dots, v_{n1}, \dots, v_{n\nu_n} \succeq 0 \qquad \text{a} \quad v_{i1} + \dots + v_{i\nu_i} = w_i \qquad \text{pro} \quad i = 1, \dots, n$$

dostáváme, že pro každé x z vektorového prostoru W platí nerovnost

$$\begin{aligned} L(x) \quad \preceq \quad & \iota w_1 \max\{\beta_{11}(x), \dots, \beta_{1\nu_1}(x)\} + \cdots + \\ & + \iota w_1 \max\{\beta_{n1}(x), \dots, \beta_{n\nu_n}(x)\} = p(x). \end{aligned}$$

Tedy $l = L$ na M (jelikož β'_{ij} je zúžením β_{ij} na M pro každé $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, \nu_i$) a $L \preceq p$ na W.

Vztah mezi prvním a druhým zobecněním Hahn-Banachovy věty

Vztah mezi prvním a druhým zobecněním Hahn-Banachovoy věty vyplývá ze vztahu věty Daxovy a univerzální věty o alternativě [7, 8]. Tento vztah ukážeme v následujícím odstavci.

Nechť jsou dány lineární formy $\beta_1, \dots, \beta_n \colon W \to \mathbb{F}$. Pak volbou $\beta_{11} = \beta_1$, $\beta_{12} = -\beta_1$, $\dots$, $\beta_{n1} = \beta_n$, $\beta_{n2} = -\beta_n$ v univerzální větě o alternativě dostáváme, že pro každé $x \in W$ platí

$$\begin{aligned} \gamma(x) &\preceq \iota w_1 \max\{\beta_{11}(x), \beta_{12}(x)\} + \cdots + \iota w_n \max\{\beta_{n1}(x), \beta_{n2}(x)\} = \\ &= \iota w_1 |\beta_1(x)| + \cdots + \iota w_n |\beta_n(x)| \end{aligned}$$

právě tehdy, když existují vektory $v_{11}, v_{12}, \dots, v_{n1}, v_{n2} \in V$, kde $v_{11}, v_{12}, \dots, v_{n1}, v_{n2} \succeq 0$, pro které platí

$$\begin{aligned} \gamma &= \iota v_{11}\beta_{11} + \iota v_{12}\beta_{12} + \cdots + \iota v_{n1}\beta_{n1} + \iota v_{n2}\beta_{n2} \\ &= \iota(v_{11} - v_{12})\beta_1 + \cdots + \iota(v_{n1} - v_{n2})\beta_n \end{aligned}$$

a

$$v_{i1} + \cdots + v_{i\nu_i} = w_i \qquad \text{pro} \quad i = 1, \dots, n.$$

Ekvivalentně dostáváme, že existují vektory $a_1 = (v_{11} - v_{12}), \dots, a_n = (v_{n1} - v_{n2}) \in V$, kde $-w_i \preceq a_i \preceq w_i$ pro $i = 1, \dots, n$, pro které platí

$$\gamma = \iota a_1 \beta_1 + \cdots + \iota a_n \beta_n.$$

Tedy touto volbou lineárních forem β_{ij} ($i = 1, \dots, n$ a $j = 1, 2$) z univerzální věty o alternativě získáváme Daxovu větu viz [8].

Nyní pokud máme dány lineární formy $\beta_1, \dots, \beta_n \colon W \to \mathbb{F}$, pak volbou $\beta_{11} = \beta_1$, $\beta_{12} = -\beta_1$, $\dots$, $\beta_{n1} = \beta_n$, $\beta_{n2} = -\beta_n$ v druhém zobecnění Hahn-Banachovy věty získáváme sublineární zobrazení na vektorovém prostoru W ve speciálním tvaru

$$\begin{aligned} p(x) &= \iota w_1 \max\{\beta_{11}(x), \beta_{12}(x)\} + \cdots + \iota w_1 \max\{\beta_{n1}(x), \beta_{n2}(x)\} = \\ &= \iota w_1 \max\{\beta_1(x), -\beta_1(x)\} + \cdots + \iota w_n \{\beta_n(x), -\beta_n(x)\} = \\ &= \iota w_1 |\beta_1(x)| + \cdots + \iota w_n |\beta_n(x)|, \end{aligned}$$

které vystupuje v prvním zobecnění Hahn-Banachovy věty. Tedy druhé zobecnění Hahn-Banachovy věty zobecňuje první zobecnění Hahn-Banachovy věty.

Závěr

Ukázali jsme, že pro konkrétní volbu sublineárního zobrazení je možné najít další zobecnění Hahn-Banachovy věty. My jsme zvolili zobecnění pomocí speciálního tvaru zobrazení vystupujícího v univerzální větě o alternativě. Dokázali jsme, že tato dvě zobecnění spolu nejen souvisí, ale druhé zobecnění je navíc zobecněním prvního zobecnění Hahn-Banachovy věty. Aplikace těchto zobecnění mohou být velmi zajímavé, u Daxovy věty víme, že je důležitou součástí teorie aproximace, a jelikož univerzální věta o alternativě s ní úzce souvisí je její použití také v této teorii vhodné. Otevírá se nám nový prostor k nahlížení na úlohy teorie aproximace, můžeme začít hledat nové možnosti využití a uplatnění jejich zobecnění.

Literatura

[1] Lukeš, J. *Zápisky z funkcionální analýzy.* 1. vydání. Praha: Karolinum, 2002. ISBN 80-7184-597-3.

[2] Lukeš, J. *Úvod do funkcionální analýzy.* 1. vydání. Praha: Karolinum, 2005. ISBN 80-246-0969-X.

[3] Buskes, G. *The Hahn-Banach Theorem surveyed.* Dissertationes mathematicae *(Rozprawy matematyczne).* Warszawa: Instytut Matematyczny PAN, 1993. ISSN 0012-1993.

[4] Bartl, D. *Příklad navrhovaný na 17th Annual Vojtěch Jarník International Mathematical Competition.* 28th March 2007.

[5] Dax, A. *A New Theorem of the Alternative.* Mathematical Programming, May 1990, Vol. 47, No. 1–3, s. 297–299.

[6] Dax, A. *The relationship between theorems of the alternetive, last norm problems, steepest descent directions, and degeneracy: A review.* Annals of Operations Research, 1993, Vol. 46, s. 11–60.

[7] Ploháková, L. *Jedno zobecnění Hahn-Banachovy věty.* Sborník SVK 2012, Přf OU, 2012.

[8] Ploháková, L. *Diplomová práce: Hahn-Banachova věta: historie, zobecnění, aplikace.* PřF OU, 2012.

Abstact The Hahn-Banach Theorem is usually formulated in the context of a vector space over the field of real numbers. We recall its algebraic version. Then we recall the Universal Theorem of the Alternative and we derive a generalization of Hahn-Banach Theorem. From former results we know the different generalization of Hahn-Banach Theorem. We show that from the new generalization we can derive the former generalization.