INDUKTÍVNE POSTUPY V OBJAVNOM VYUČOVANÍ MATEMATIKY

Anna Hrešková[1] Lukáš Lednický[2]
[1]*Katedra matematiky Fakulta príodných vied Univerzita Konštantína Filozofa, Tr. A. Hlinku 1, 94974 Nitra, telefón:+421 37 6408 709, anna.hreskova@ukf.sk*
[2]*Katedra matematiky Fakulta prírodných vied Univerzita Konštantína Filozofa, Tr. A. Hlinku 1, 94974 Nitra, lukas.lednicky@ukf.sk*

Abstrakt

V príspevku sa zaoberáme stručnou charakteristikou induktívneho myslenia a objavného vyučovania ako jednej z induktívnych vyučovacích metód v matematike. Je veľmi dôležité uvedomiť si význam časti vyučovania, ktorá by mala byť popri deduktívnom sprostredkúvaní informácií vyčlenená aj na induktívne skúmanie a experimentovanie, ktoré rozvíjajú žiakovo logické i analytické myslenie a pomáhajú nové poznatky zaraďovať do už existujúcej siete nadobudnutých a osvojených vedomostí. V príspevku následne objavným spôsobom riešime problém určenia počtu všetkých vhodných ciest z bodu A do bodu B umiestnených do štvorcovej siete. Pri riešení využívame predovšetkým induktívne stratégie zovšeobecnenia a špecializácie.

Kľúčové slová: *induktívne myslenie; objavné vyučovanie; zovšeobecnenie; špecializácia.*

Úvod

Ak by sme chceli stručne popísať induktívny spôsob myslenia, dalo by sa povedať, že sa na základe konkrétnych poznatkov alebo doterajších skúseností snažíme odvodiť všeobecné pravidlo alebo predpovedať ďalší vývoj pozorovaného javu. Najjednoduchším príkladom induktívneho myslenia je naša bežná každodenná logika, ak napríklad vidíme, že je vonku úplne jasná obloha, tak so sebou nebudeme zbytočne brať dáždnik. Rovnako tak dieťa, ktoré v živote videlo len biele labute, bude očakávať, že aj ďalšia labuť, ktorú uvidí, bude biela. Už na základe týchto dvoch jednoduchých príkladov je zrejmé, že induktívny prístup nás nie vždy dovedie k správnemu záveru – napriek jasnej oblohe môže byť o hodinu prudká búrka a dané dieťa môže pri najbližšej príležitosti vidieť prvýkrát v živote čiernu labuť.

Materiál a metódy

Induktívne myslenie preniklo aj do vyučovania prostredníctvom induktívnych vyučovacích metód, akou je napríklad aj objavné vyučovanie. Jednou zo základných charakteristík tejto metódy je, že je orientovaná predovšetkým na žiaka, nie učiteľa. Sám žiak je zodpovedný za osvojovanie nových poznatkov, a ako tvrdia Prince a Felder [4], stáva sa tvorcom vlastnej reality, nie len pasívnym prijímateľom verzie reality sprostredkovanej učiteľom. To ale neznamená, že úloha učiteľa je nepodstatná. Napriek tomu, že je tento spôsob vyučovania zameraný na žiaka, vyžaduje aj učiteľovu pripravenosť, spôsobilosť a vhodnú voľbu problémov a úloh. Inak môže dojsť k tomu, že budú žiaci zmätení a nebudú rozumieť, čo sa od nich očakáva. Pri nevhodnej voľbe problémov sa môže stať, že sa žiaci budú cítiť skôr odradení, než motivovaní a tým sa stratí celková efektivita vyučovacej hodiny.

Ďalším významným znakom je aktívna zainteresovanosť žiakov, kedy je potrebné aby sami volili vhodné postupy, zapájali už osvojené poznatky a aplikovali ich na nové situácie. Práve to, že žiaci musia nad úlohou rozmýšľať hlbšie a naozaj jej porozumieť, táto induktívna metóda posilňuje vnútornú konzistenciu poznatkov, ich vzájomnú náväznosť a prepojenie s realitou.

Mnohí sa domnievajú, že v opozícii k induktívnemu mysleniu stojí myslenie deduktívne, ktoré vo vyučovaní môže tiež znamenať, že žiak je len prijímateľom informácii a poznatkov, ktoré sú mu už v hotovej podobe sprostredkované učiteľom. Nie je úplne pravdou, že by induktívne a deduktívne myslenie boli protikladnými, to by totiž znamenalo, že stoja proti sebe. Polya [3] vo svojej knihe píše, že tieto dva spôsoby myslenia, ale i vyučovania sa v skutočnosti veľmi dobre dopĺňajú a každý z nich má svoje miesto. Vo vyučovaní je preto vhodné kombinovať obe metódy, zameranie sa len na jednu z nich môže mať negatívne následky. V súčasnosti je problémom, že mnohí učitelia si volia len deduktívne metódy, žiakom predávajú svoje poznatky a vedomosti v ich výslednej podobe. Úlohou žiaka je potom len tieto vedomosti absorbovať a reprodukovať, učiteľ sa v jeho očiach stáva neomylnou a nespochybniteľnou entitou, čo nie je dobré. K mnohým veľkým a prelomovým objavom by vôbec nebolo prišlo, keby daný vedec nezačal pochybovať o určitej zabehnutej teórii, keby nebol skúmal danú vec alebo jav spôsobom odlišným, než jeho predchodcovia. Snáď najzrejmejším príkladom z oblasti matematiky je Lobačevskij, ktorý sa takto dostal k vypracovaniu novej geometrie.

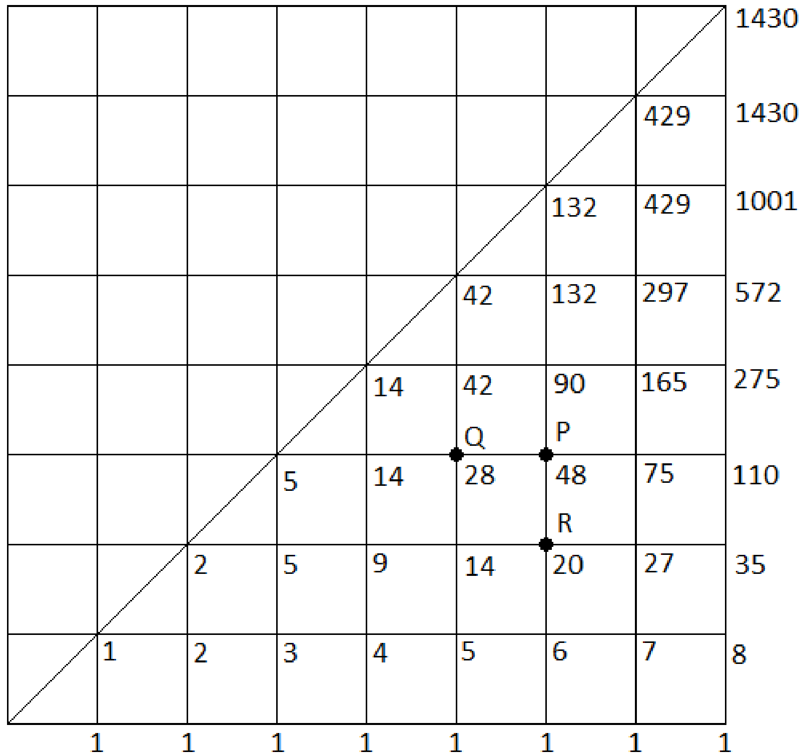
Na druhej strane, aplikovanie induktívnych vyučovacích metód nemusí automaticky znamenať dosiahnutie lepších výsledkov. Ako už bolo povedané, induktívne vyučovacie metódy sú zamerané najmä na hĺbkové pochopenie problému, analýzu situácie, prípadne experimentovanie pri riešení. *„Riešením nie rutinných ‘počtárskych‘ ale predovšetkým problémových úloh sa pestuje aj kreativita, teda tvorivosť a prístupnosť k novým originálnym myšlienkam, schopnosť vnímať nové idey. ... Tvorivosť by však mala byť podporená aj teoretickými poznatkami.“* viď [5.] na strane 4. Je teda potrebné, aby vyučovaniu prostredníctvom induktívnych metód predchádzalo vyučovanie deduktívne, pri ktorom žiaci nadobudnú základnú štruktúru vedomostí, na ktorú môžu neskôr nadpájať nové. Teda, induktívne vyučovanie sa bez deduktívneho nezaobíde a podobne, deduktívne nadobudnuté poznatky bez induktívneho skúmania často zostávajú mŕtvymi namemorovanými izolovanými vetami odtrhnutými od reality.

Výsledky a diskusia

Ako ukážku použitia induktívnych postupov v objavnom vyučovaní uvádzame príklad odvodenia Catalanovych čísel. Zadanie vybranej úlohy je prebraté z [2] str. 98.

Úloha: Koľko existuje ciest z ľavého dolného rohu (A) do pravého horného rohu (B) v štvorcovej sieti *nxn*, ktoré neprechádzajú nad diagonálu, ak sa môžeme pohybovať len vpravo a hore?

Riešenie: Skúsme najprv preskúmať niekoľko štvorcov a zistiť, koľko týchto ciest existuje. Vo štvorci veľkosti 1x1 existuje len jedna takáto cesta. Vo štvorci veľkosti 2x2 sú už 2 a vo štvorci 3x3 ich je 5. Zostavme obrázok štvorca veľkosti 8x8, do ktorého budeme dopĺňať takto zistené čísla. Okrem týchto čísel doň doplníme aj počty ciest do všetkých ostatných bodov ležiacich pod diagonálou (viď obrázok 1). Všimnime si rozloženie a vzťahy medzi číslami. Na diagonále ležia hľadané počty ciest. Pod týmito číslami sú vždy rovnaké čísla, pretože z tohto bodu sa dostanem do bodu ležiacemu nad ním len jediným spôsobom – posunúť sa nahor. Ďalej v prvom riadku sa nachádza len číslo 1. Do týchto bodov sa dostaneme len posunom vpravo, preto existuje vždy len 1 cesta.



Obrázok 1: Počty ciest v štvorcovej sieti 8x8

Sledujme teraz ľubovoľný bod, ktorý leží pod diagonálou a neleží v prvom riadku. Označme ho P. Číslo, ktoré mu je priradené, sa vždy rovná súčtu čísla naľavo (Q) od neho a čísla pod ním (R). Táto vlastnosť sa dá vysvetliť podobne ako predchádzajúce dve vlastnosti. Ak sa vieme do bodu Q dostať q spôsobmi a z bodu Q do bodu P sa vieme dostať len jediným spôsobom, tak do bodu P cez bod Q sa dostaneme práve q spôsobmi. Analogicky to platí pre bod R, teda do bodu P cez bod R sa vieme dostať r spôsobmi. Potom všetkých ciest do bodu P je $q+r$. Pomocou týchto vlastností dokážeme vyplniť ľubovoľne veľký štvorec.

Samotné čísla a posledné dve vlastnosti sa podobajú číslam a vlastnostiam v Pascalovom trojuholníku. Zostavme preto čísla zo štvorca do podobného trojuholníka s využitím symetrie podľa diagonály. Na vrchol tohto trojuholníka umiestnime číslo 1. Môžeme to interpretovať tak, že vo štvorci 0x0 (bod) existuje jediná cesta a to prázdna. Takto vytvorený trojuholník porovnajme s Pascalovým trojuholníkom.

1	1
1 1	1 1
1 1 1	1 2 1
1 2 2 1	1 3 3 1
1 3 2 3 1	1 4 6 4 1
1 4 5 5 4 1	1 5 10 10 5 1
1 5 9 5 9 5 1	1 6 15 20 15 6 1

Obrázok 2: Porovnanie vytvoreného trojuholníka s Pascalovým trojuholníkom

Všimnime si, že počty hľadaných ciest vo štvorci nxn sa nachádzajú v prostrednom stĺpci trojuholníka. Označme ich C_n. Porovnávajme tieto čísla so zodpovedajúcimi číslami v Pascalovom trojuholníku. Tieto označme P_n. Môžeme si všimnúť, že číslo P_n je vždy $(n+1)$ – násobkom čísla C_n. Čísla P_n v Pascalovom trojuholníku môžeme zapísať v tvare $\binom{0}{0}, \binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \binom{6}{3}$ atď. Všeobecne môžeme zapísať $P_n = \binom{2n}{n}$. Potom však platí $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Poznámka: Dôkaz odvodeného vzťahu pre výpočet Catalanových čísel z dôvodu rozsahu príspevku neuvádzame. Čitateľ si ho môže nájsť v knihe [1].

Záver

Tradičné vyučovanie matematiky na školách väčšinou prebieha podľa deduktívnej štruktúry – ako prvé sú prezentované všeobecné vzorce či teória a následne sa pristúpi k riešeniu úloh, ktoré sú často založené len na dopĺňaní konkrétnych údajov do poskytnutej šablóny. Pravdou ale je, že matematika a prírodné vedy boli rozpracované aj vďaka induktívnym postupom, preto je vhodné priebeh ich vyučovania rozšíriť aj o induktívne metódy. Napriek tomu, že sa jedná o prístup kladúci do centra pozornosti žiaka, vyžaduje si aj väčšiu prípravu učiteľa, ktorý musí byť schopný reagovať na otázky žiakov a správne ich usmerňovať. Problémy vyžadujúce induktívne myslenie by teda nemali byť vynechané ani pri vzdelávaní budúcich učiteľov matematiky, ale aj iných prírodovedných predmetov.

Literatúra

[1] ANDERSON, I. *A first course in Discrete Mathematics*. London, Springer, 2002. ISBN 1-85233-236-0.

[2] ENGEL, A. *Problem Solving Strategies*. Springer, 1998. 403 s. ISBN 0-387-98219-1.

[3] POLYA, G. *Mathematics and Plausible Reasoning Volume I Induction and Analogy in Mathematics.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1954.

[4] PRINCE, M. J., FELDER, R. M. *Inductive Teaching and Learning Methods: Definitions, Comparisons and Research Bases.* [Citované 2. apríla 2013] . Dostupné na World Wide Web http://www4.ncsu.edu/unity/lockers/users/f/felder/public/Papers/InductiveTeaching.pdf

[5] VRÁBEL, P. *Heuristika a metodológia matematiky.* Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa, Nitra 2005. ISBN 80-8050-840-2

Abstract

The contribution deals with a brief description of inductive reasoning and inquiry-based learning as one of inductive teaching methods in mathematics. It is crucial to realize the importance of the part of teaching which should, apart from deductive way of conveying information, reserved also for inductive exploration and experimentation, which encourage the development of pupils' logical and analytical thinking and help to include the new findings into the already existing network of acquired knowledge. The second part of the contribution offers an inquiry-based way of solving a problem of determining the number of all suitable routes from point A to point B placed in a square grid. The solution utilizes primarily the inductive strategies generalization and specialization.