HISTORICKÉ ÚLOHY VEDÚCE K LINEÁRNEJ ROVNICI VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

Monika Galbavá
Katedra matematiky FPV UKF v Nitre,Tr. A.Hlinku, 94901 Nitra,
monika.galbava@ukf.sk

Abstrakt
V článku prostredníctvom historických úloh ukazujeme možnosti využitia histórie riešenia lineárnych rovníc vo vyučovaní matematiky (v ôsmom a deviatom ročníku ZŠ).

Kľúčové slova: *lineárna rovnica, vyučovanie, metóda chybného predpokladu, historické úlohy*

Úvod

Riešenie rovníc na základnej škole v SR (ako súčasť tematického okruhu Čísla, premenná a počtové výkony s číslami) sa začína vyučovať v ôsmom ročníku. V tomto ročníku je to väčšinou len formou propedeutiky. Po objasnení pojmu premenná a práce s výrazmi s premennou sa najprv riešia jednoduché úlohy vedúce k lineárnym rovniciam, avšak bez formalizácie do podoby rovnice. Väčšinou úvahou, znázornením alebo metódou pokus-omyl (štátny vzdelávací program, 2009). V deviatom ročníku sa prechádza aj k riešeniu rovníc pomocou ekvivalentných úprav (jednoduchšie lineárne rovnice a rovnice s neznámou v menovateli). Žiaci sa teda s rovnicami stretávajú podľa štátneho vzdelávacieho programu (po reforme v ŠVP v roku 2008) až v ôsmom ročníku (na rozdiel od predchádzajúcich rokov, kedy jednoduché rovnice žiaci riešili už v šiestom ročníku), pričom algoritmus na ich riešenie spoznávajú v deviatom ročníku.

Cieľom nášho článku je ukázať niektoré možnosti využitia histórie o riešení rovníc práve v ôsmom ročníku a najmä deviatom ročníku základnej školy, kde by história mohla výborne dopĺňať propedeutiku riešenia rovníc. Uvedieme niektoré vhodné úlohy známe z histórie (čerpali sme z: Bečvář, 2007; Francová, 2010), ktoré sú vhodné najmä pre deviatakov (použitie ekvivalentných úprav), niektoré úlohy i pre ôsmakov (pri úlohách, kde je to uvedené, a to metódou chybného predpokladu) . Niektoré zadania sú pre potreby vyučovania jemne upravené, výsledky väčšinou neuvádzame.

Materiál a metódy

1. História vo vyučovaní

Z výskumov (i osobných skúseností učiteľov) vieme, že história vo vyučovaní môže predstavovať výrazný motivačný prvok pre žiakov a pomáha spĺňať najmä afektívne (postojové) ciele výučby matematiky. Už Križalkovič (Gábor-Kopanev-Križalkovič, 1989) okrem iného medzi niektoré formy motivácie v školskej matematike uvádza i motiváciu historickými poznámkami. Navyše komparáciou súčasných a historických postupov riešenia sa žiakom otvoria možnosti k lepšiemu pochopeniu učiva, prípadne k zvýšeniu záujmu o matematiku. Na dôležitosť histórie na hodinách matematiky poukazuje napríklad aj Van Ameronová (2002), pretože historické problémy a úlohy pomáhajú študentom uvedomiť si, že matematika nie je len výsledný produkt (angl. *ready-made product*), zmes definícií a pojmov, ktoré je treba sa naučiť, ale *proces* - riešenia problémov a stratégií, ktoré vznikali a menili sa i niekoľko storočí a záviseli od spoločenských a kultúrnych podmienok

Heiede (1992) dokonca tvrdí, že ak učiteľ učí matematiku, musí učiť aj históriu, keďže je jej časťou. A ak si nie je vedomý, že matematika má aj históriu, neučí matematiku a nie je učiteľom matematiky.

2. Historické úlohy

Vývoj algebrickej symboliky (podľa G. H. F. Nesselmanna) charakterizujú tri etapy: rétorická algebra (verbálna, charakterizovaná nepoužívaním symbolov, postupy riešení boli tiež vysvetľované slovne), synkopická (čiastočné používanie symbolov) a symbolická algebra Mnohé historické úlohy, ktoré uvedieme (a sú vhodné na hodiny matematiky), vedú k jednoduchým lineárnym rovniciam. Pochádzajú z obdobia prevahy rétorickej algebry, my budeme však pracovať s našou symbolikou a označovaním neznámej, na akú sú zvyknutí aj žiaci.

Už v egyptskej matematike, ktorú poznáme najmä z Rhindovho a Moskovského papyrusu, nachádzame úlohy vedúce k lineárnej rovnici o jednej neznámej. Tieto úlohy sa týkali najmä výpočtu neznámeho množstva (napr. neznámeho množstva zásob, obilia), niekedy je tento typ úloh označovaný ako úlohy typu *acha* (v Egypte tento termín predstavoval neznáme množstvo). Z Rhindovho papyrusu pochádza veľmi jednoduchá a jednoducho formulovaná úloha:

Úloha 1. *„Hromada a jej štvrtina dávajú spolu 15.“*
Úlohou je zistiť, koľko predstavuje hromadu. Úloha sa v dnešnej reči (žiakom) môže zdať tak jednoduchá až nezmyselná, navyše nie sú uvedené žiadne jednotky. Úloha ale vedie na jednoduchú rovnicu

$$x+\frac{1}{4}x=15,$$

ktorú deviataci ekvivalentnými úpravami vyriešiť vedia. V papyruse je úloha vyriešená *metódou chybného predpokladu*..
Táto metóda riešenia lineárnych rovníc pochádza práve z Egypta (2000-1000 p.n.l.). Jej použitie nachádzame v dejinách v Číne, Babylone, aj v Európe. Podstatou metódy je uhádnuť riešenie (lineárnej rovnice ax = b), hoci chybné, a potom ho vhodne korigovať, aby sme dostali riešenie správne. Pri riešení našej úlohy uhádneme vhodne riešenie, napríklad x = 4 (je vhodné, lebo sa z neho ľahko vypočíta štvrtina). Ľavá strana rovnice je však 5 namiesto 15, preto uhádnuté riešenie treba ešte strojnásobiť, preto riešenie bude 12. Obdobný postup bol uvedený aj v papyruse.

Aj v Mezopotámii (asi v 18.st.p.n.l.) nachádzame úlohy, ktoré vedú k lineárnej rovnici:

Úloha 2. *„Našiel som kameň, ale nepoznám jeho hmotnosť. Po tom, čo som pridal jednu sedminu a potom ešte jednu jedenástinu toho všetkého, mám jednu mínu. Aká bola pôvodná hmotnosť kameňa?“*
Mína bola jednotka hmotnosti (približne 500g). 1mína = 60 talentov = 3600 šekelov. Výsledok vyjadrime v mínach, prípadne premeníme na talenty. Ak označíme x neznámu hmotnosť kameňa, dostaneme rovnicu:

$$x+\frac{1}{7}x+\frac{1}{11}.(x+\frac{1}{7}x)=1,$$

vyriešením ktorej žiaci dostanú pôvodnú hmotnosť kameňa $\frac{77}{96}$ míny, čo je $48\frac{1}{8}$ talentov.

Nasledujúca úloha pochádza z Indie (Bhaskara, 12.st.):

Úloha 3. *„Zo zväzku čistých lotosov boli jedna tretina, pätina, resp. šestina postupne obetované bohom Šivovi, Višnovi či Šúrjovi a štvrtina bola obetovaná Bhavanimu. Zostávajúcich šesť bolo darovaných vysoko váženému hodnostárovi. Rýchlo mi povedz, koľko bolo lotosov?“*

úloha vedie na rovnicu

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+\frac{x}{6}+\frac{x}{4}+6=x,$$

kde x predstavuje neznáme množstvo lotosov.

Zo zbierky Úlohy k bystreniu mladíkov (Alkuin z Yorku, asi 8.st.) pochádzajú zaujímavé úlohy:

Úloha 4. *„Nejaký muž prechádzajúci sa po ceste videl iných ľudí idúcich oproti nemu a povedal im: „Chcel by som, aby vás bolo ešte jedenkrát toľko, koľko vás je a polovica z poloviny (onoho dvojnásobku), a opäť polovica z poloviny (z poloviny onoho dvojnásobku) , potom by vás, i so mnou, bolo sto. Nech povie, kto chce, koľko ľudí muž videl.“*

Úloha sa bude pravdepodobne zdať žiakom trocha komplikovaná, nielen nezvyčajne zadanou úlohou, ale aj pri zostavovaní rovnice:

$$2x+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.2x+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(\frac{1}{2}.2x)+1=100,$$

odkiaľ neznámy počet ľudí x je 36.

Úloha 5. *„Nejaký muž stretol žiakov a povedal im: “Koľko vás je v škole?“ Jeden z nich mu odpovedal: „Nepoviem ti to. Spočítaj nás dvakrát, vynásob troma a rozdeľ na štyri časti. Ak k jednej tejto časti pripočítaš seba samého, naplní to stovku.“ Nech povie, kto vie, koľko bolo žiakov.“*

Ak x označíme neznámy počet žiakov, úloha vedie na lineárnu rovnicu:

$$2x.3.\frac{1}{4}+1=100$$

Nasledujúca úloha od Metrodorosa (Grécko**,** zbierky epigramov Anthologia Palatina) je napísaná básnickou rečou, pre žiakov v matematike veľmi neobvyklou formou:

Úloha 6. *„Pytagoras vznešený, helikónskych múz potomok, na moju odpovedz otázku, koľko verných žiakov vo svojom dome máš, kde ako borci na ihrisku sa usilujú o tvoje prvenstvo?“*

„Rád odpoviem, Polykrat. Vidíš, že polovica žiakov pestuje matematiku, štvrtina na večnú prírodu svoje skúmanie obracia. Sedmina nerobí nič, len mlčanie zachováva, len svoju dušu očisťuje, vieš, opakovaním učiva. A pridaj k nim tri ženy, ktoré nevstávajú veľmi skoro, medzi nimi najvýznamnejšia je moja milovaná Teano. Hľa, a to sú všetci, ktorí vedú cestu múdrosti a snáď i múz pierijských, im zjednám lásku božiu.“

Koľko žiakov má Pytagoras?

Úloha vedie na rovnicu

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}+3=x,$$

odkiaľ neznámy počet žiakov x je 28.

Z Mezopotámie, z tabuľky YBC 4669, pochádza nasledujúca úloha, nie nepodobná dnešným úlohám, ktoré riešia žiaci 9. ročníka základnej školy:

Úloha 7. *„ $\frac{2}{3}$ z $\frac{1}{3}$ mojich zásob som dal preč. „7“ mi ostalo. Aké som mal zásoby?“*

Úloha vedie na lineárnu rovnicu

$$x-\frac{2}{3}.\frac{1}{3}x=7,$$

kde x predstavuje neznáme, pôvodné množstvo zásob.

Aj posledná úloha poukazuje na to, že typické počtárske úlohy našich zbierok sú stovky rokov staré. Líšia sa mnohokrát len kontextom, spôsobom vyjadrovania, prípadne rozdielnymi jednotkami. Na porovnanie uvedieme dve úlohy z učebnice z matematiky pre 9.ročník a zbierky úloh. Vhodne a aktuálne je zvolený kontext (vymieňanie hokejových kartičiek, ekológia):

Úloha 8. *„Rado sa sťahoval do iného mesta. Rozhodol sa podeliť so svojimi kartičkami hokejistov s kamarátmi. Prvému dal jednu tretinu, druhému polovicu zo zvyšku. Ostalo mu ešte 12 kartičiek. Koľko kartičiek Jano rozdal?* (Kolbaská, s.109)

Úloha 9. *„Ochrancovia prírody vyčistili úsek potoka za tri dni. Prvý deň vyčistili tretinu dĺžky úseku potoka, druhý deň tretinu zvyšku a tretí deň 8km dĺžky úseku potoka. Aký dlhý je vyčistený úsek potoka?"(* Ištoková, 2007)

Záver

Z týchto a podobných úloh vidíme, aké rôzne úlohy z bežného života sa kedysi počítali. Boli to úlohy reálne, s reálnym kontextom, súvisiace s praktickými činnosťami vtedajších ľudí, vystihujúce potreby ľudí. Počítal a rozdeľoval sa majetok, množstvo stavebného materiálu či obilia. No objavujú sa aj úlohy zábavnej matematiky, na pobavenie (matematikou) alebo cibrenie mysle, ktoré však vedia zaujať aj pobaviť aj dnes. Zaujímavá pre žiakov je aj iná forma zadania úloh a štýl, akým boli písané.

Zaradením takýchto úloh do vyučovania učiteľ prehlbuje medzipredmetové vzťahy (dejepis, v mnohých prípadoch aj literatúra). Na príklade rétorickej algebry a v minulosti potreby popisovania každého postupu riešenia úloh slovom učiteľ zdôrazňuje výhody a potrebu zavádzania premenných a matematickej symboliky.

Literatúra

[1.] AMEROM, B.A., van. Reinvention of Early Algebra : Developmental Research on the Transition from Arithmetic to Algebra: dissertation. Utrecht: Proefschrift Universiteit, 2002. 340 p. ISBN 90-73346-48-7.

[2.] BEČVÁŘ, J. Přímá úměrnost - lineární rovnice [online]. In: Jindřich Bečvář (author): Z historie lineární algebry. Praha: Matfyzpress, 2007 [cit.20.3.2013]. Dostupné na internete: http://dml.cz/dmlcz/400924.

[3.] FRANCOVÁ, L. Historie rovnic [online]. 2010 [cit. 20.03.2013]. Dostupné na internete: http://black-hole.cz/cental/wp-content/uploads/2010/04/Historie-rovnic.pdf.

[4.] GÁBOR, O., KOPANEV, O., KRIŽALKOVIČ, K. Teória vyučovania matematiky 1. Bratislava: SPN, 1989.

[5.] HEIEDE, T. Why Teach History of Mathematics? In The Mathematical Gazette [online], Vol. 76, No. 475, 1992 [cit. 2012-08-09]. pp. 151-157. Dostupné na internete: http://www.scribd.com/doc/2893658/Why-teach-history-of-mathematics1.

[6.] IŠTOKOVÁ, A. Riešené testy z matematiky na prijímacie skúšky na stredné školy. Bratislava: SPN, 2007. ISBN 978-80-1001127-8.

[7.] KOLBASKÁ, V. Matematika pre 9. ročník ZŠ a 4. ročník gymnázia s osemročným štúdiom - 1.časť. Bratislava: SPN, 2012.

[8.] Štátny vzdelávací program: Matematika, príloha ISCED2. Bratislava, 2009.

Abstract

In this article we show some possibilities how to use history of mathematics (history of solving linear equations) in the eighth and ninth grade of the primary school.